IST GUT

Wolfgang Lenzen

Im Rahmen einer Logik der Werte geht man normalerweise davon aus, dass für die jeweilige Bezugsperson a sowohl eine Wahrscheinlichkeitsfunktion w_a als auch ein metrischer Wertbegriff u_a (den Personenindex a lassen wir im Folgenden meistens weg) erklärt ist, wobei für die Nutzensfunktion u insbesondere zu gelten hat:

U1: $u(A \lor B) = u(A) \times w(A) + u(B) \times w(B) / w(A \lor B)$, falls $w(A \land B) = 0$.

Nach diesem *Mittelwertprinzip* ist der Nutzen oder Wert einer Disjunktion $A \lor B$ gleich dem mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $w(A)$, $w(B)$ gewichteten Mittel der Einzelwerte $u(A)$, $u(B)$, vorausgesetzt A ist (nach Meinung von a) mit B unverträglich. Es gelten dann u.a. die folgenden, einfachen Theoreme:

T1: $w(A) = 0 \supset u(\mathrm{A} \lor B) = u(B)$
T2: $w(A) = 1 \supset u(A \land B) = u(B)$
T3 $u(A) > 0 \land u(B) > 0 \supset u(A \lor B) > 0$, falls $w(A \land B) = 0$.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Funktion u für die jeweiligen Argumente definiert ist, dass diese also eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit haben – für $\mathrm{w}(C) = 0$ bleibt $\mathrm{u}(C)$ undefiniert.

Nach Untersuchungen von R. C. Jeffrey und E. Bolker könnte man sich statt auf u_a und w_a alternativ auf einen komparativen Wertbegriff $\leq_a$ stützen, den man mittels der metrischen Begriffe natürlich per $(A \leq_a B) :\equiv (u(A) \leq u(B))$ definieren würde. Es lässt sich dann zeigen, dass komparative Wertstrukturen unter gewissen Voraussetzungen metrisierbar sind:

Zu jedem $\leq_a$, das einschlägigen Bedingungen genügt, gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß w_a und eine Nutzensfunktion u_a dergestalt, dass für alle (f.a.) A, B gilt: $(A \leq_a B)$ genau dann, wenn (gdw.) $u_a(A) \leq u_a(B)$.[1] Als Nebenprodukt dieses Metrisierungssatzes darf man sich dabei auf *normierte* Nutzensfunktionen u stützen, für die gilt[2]

U2 $u(A \lor \neg A) = 0$.

Aus diesem Grunde gehen auch wir im Folgenden stets von normierten Nutzensfunktionen aus, die u.a. den nachstehenden Prinzipien gehorchen:

T4: $w(A) = 1 \supset u(A) = 0$
T5: $u(A) > 0 \equiv u(A) > u(\neg A)$
T6: $u(A) \leq 0 \lor u(\neg A) \leq 0$.

In dieser Arbeit sollen nun *klassifikatorische* Wertbegriffe untersucht werden, von denen sich insbesondere die folgenden zwei anbieten: *A ist gut* gdw. der Wert von A größer ist als der von $\neg A$ (bzw. angesichts von U2 bzw. T5 äquivalent: wenn $u(A) > 0$ bzw. $u(A) > u(A \lor \neg A)$); und zweitens: A ist *optimal* oder *uneingeschränkt gut* gdw. nicht nur A per se gut ist, sondern wenn zugleich A in Kombination mit beliebigen anderen (mit A verträglichen) Ereignissen B gut ist. Diese Grundgedanken explizieren wir formal durch

Def.1: $G(A) :\equiv (u(A) > 0)$

[1] Vgl. F. v. Kutschera, *Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen* (Freiburg - München 1973), Abschnitte 3.3 und 3.4 sowie die dort angegebene Literatur.
[2] Die repräsentierenden Nutzensfunktionen u, u' sind nämlich nur eindeutig bis auf Transformationen der Gestalt $u'(A) = a \times u(A) + b / c \times u(A) + d$ mit gewissen Bedingungen für die Parameter a, b, c, d; vgl. Kutschera (1973), S. 98.

Def.2: $O(A) :\equiv u(A) > 0 \wedge \bigwedge B(w(A\wedge B) > 0 \supset u(A\wedge B) > 0)$.

Der Leser kann leicht die folgenden Gesetze verifizieren:

T7: $O(A) \supset G(A)$
T8: $G(A) \supset M(A)$, wobei $M(A): \equiv w(A) > 0$
T9: $G(A) \supset M(\neg A)$
T10: $G(A) \supset \neg G(\neg A)$
T11: $O(A) \supset \neg O(\neg A)$
T12: $G(A) \wedge G(B) \supset G(A\vee B)$
T13: $O(A) \wedge O(B) \supset O(A\vee B)$
T14: $\ddot{U}(A) \wedge G(B) \supset G(A\wedge B)$, wobei $\ddot{U}(A): \equiv \neg M(\neg A)$
T15: $M(A\wedge B) \wedge O(A) \supset O(A\wedge B)$
T16: $\ddot{U}(A) \wedge G(A\wedge B) \supset G(B)$
T17: $\ddot{U}(A) \wedge O(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}) \supset O(\mathrm{B})$
T18: $A\equiv B \vdash G(A) \supset G(B)$
T19: $A\equiv B \vdash O(A) \supset O(B)$.

All diese Prinzipien folgen aus dem Mittelwertprinzip U1, der Normierungsbedingung U2 und den bekannten Axiomen subjektiver Wahrscheinlichkeit zusammen mit den Definitionen 1 und 2.

Wenden wir uns nun zunächst einer Logik des „starken" Wertbegriffs *O* zu und setzen eine geeignete aussagenlogische Sprache (mit unendlich vielen Satzkonstanten) voraus, wobei für die zusätzlichen Operatoren *O* und *Ü* die Formregeln gelten: Ist *A* ein Satz, der keine Vorkommnisse von ‚*O*' oder ‚*Ü*' enthält, so sind $O(A)$ und $\ddot{U}(A)$ Sätze unserer Sprache – wir beschränken uns also vorerst auf eine Sprache ohne Iterationen von Modaloperatoren *O*, *Ü*. Die für die gesuchte *O*-Logik benötigte Teillogik des Operators *Ü* wurde in Lenzen (1980) ausführlich dargestellt. Wir können uns deshalb mit dem Hinweis begnügen, dass sie axiomatisch durch Hinzunahme von

Ü1: $\ddot{U}(A) \supset M(A)$
Ü2: $\ddot{U}(A) \wedge \ddot{U}(B) \supset \ddot{U}(A\wedge B)$
RÜ: $A \vdash \ddot{U}(A)$
RÜ*: $A\supset B \vdash \ddot{U}(A) \supset \ddot{U}(B)$

zu einer Standard-Basis der normalen Aussagenlogik gewonnen werden kann, wobei die Deduktionsregeln RÜ, RÜ* natürlich voraussetzen, dass in *A* und *B* keine Modaloperatoren vorkommen. Die Wert-Logik **O** erhält man nun als Erweiterung dieses doxastischen Kalküls der Überzeugungslogik durch zusätzliche Aufnahme der Axiome

O1: $O(A) \supset K(A)$, wobei $K(A): \equiv M(A) \wedge M(\neg A)$
O2: $O(A) \wedge O(B) \supset O(A\vee B)$
O3: $O(A) \wedge M(A\wedge B) \supset O(A\wedge B)$
O4: $\ddot{U}(A) \wedge O(A\wedge B) \supset O(B)$

sowie der entsprechend auf modalfreie Sätze eingeschränkten Deduktionsregel

RO: $A\equiv B \vdash O(A) \supset O(B)$.[3]

[3] Statt durch O1-O4, RO könnte man die *O*-Logik alternativ durch O1-O3 + O4*: $\ddot{U}(A\equiv B) \supset (O(A) \supset O(B))$ axiomatisieren. Aus RÜ und O4* folgt nämlich sofort RO, und O4 gewinnt man wie folgt: mit $\ddot{U}(A)$ hat man $\ddot{U}(A\wedge B \equiv B)$, so dass nach O4* $O(A\wedge B) \supset O(B)$ folgt. Umgekehrt gewinnt man O4* mittels O3, RO und O4; denn aus $\ddot{U}(A\equiv B)$ folgt mit $O(A)$ gemäß O3 $O(A\wedge B)$; da $A\wedge B$ mit $(A\equiv B) \wedge B$ logisch äquivalent ist, erhält man per RO weiter $O((A\equiv B) \wedge B)$ und daraus wegen $\ddot{U}(A\equiv B)$ nach O4 das gewünschte $O(B)$.

Zur intuitiven Gültigkeit dieser Axiome von **O** ist lediglich darauf hinzuweisen, dass so wie sich die *O*-Prinzipien O1-O4, RO aus den Gesetzen für normierte Nutzensfunktionen ableiten lassen (vgl. T7-T9, T13, T15, T17), entsprechend die reinen *Ü*-Prinzipien Ü1, Ü2, RÜ und RÜ* aus den üblichen Wahrscheinlichkeitsgesetzen zusammen mit der Definition $Ü(A)$: ≡ $w(A) = 1$ folgen.

In Verallgemeinerung des Begriffs eines probabilistischen *Ü*-Modells aus Lenzen (1980), Abschnitt 6.3 erhält man für die starke Wertlogik **O** die folgende, ganz natürlich (d.h. durch die Def. 2) bestimmte mögliche-Welten-Semantik:

Def.3: Ein *O*-Modell ist ein Quadrupel $<I, w, u, V>$, für das gilt:

a) I ist eine nichtleere (höchstens abzählbare) Menge von „Welten";
b) w ist eine Funktion, die jedem $i\varepsilon I$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß w_i auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(I)$ von I zuordnet;
c) u ist eine Funktion, die jedem $i\varepsilon I$ eine normierte Nutzensfunktion u_i auf $\mathscr{P}(I)$-N_i (mit $N_i := \{J: J\subset I \wedge w_i(J) = 0\}$) zuordnet;
d) V ist eine Funktion, die jedem Satz A relativ zu jedem $i\varepsilon I$ einen Wahrheitswert $V(i, A)\in\{w, f\}$ so zuordnet, dass gilt:
   I) $V(i, \neg A) = w$ gdw. $V(i, A) = f$;
   II) $V(i, A \supset B) = f$ gdw. $V(i, A) = w$ und $V(i, B) = f$;
   III) $V(i, Ü(A)) = w$ gdw. $w_i([A]) = 1$;
   IV) $V(i, O(A)) = w$ gdw. $u_i([A]) > 0$ und f.a. $X\subset[A]$: wenn $w_i(X) > 0$, dann $u_i(X) > 0$.

Es lässt sich zeigen, dass der angegebene Kalkül **O** adäquat ist relativ zur angegebenen Semantik. Dabei kann die Widerspruchsfreiheit von **O**, also die Tatsache, dass alle Theoreme von **O** durch sämtliche *O*-Modelle in allen Welten erfüllt werden, vom Leser relativ leicht nachgeprüft werden. Der Beweis der Vollständigkeit von **O** ist hingegen alles andere als trivial und kann auch im Rahmen dieser Arbeit nicht komplett ausgeführt werden. Als Kernstück jenes Beweises wollen wir hier lediglich den nachfolgenden Metrisierungssatz für starke klassifikatorische Wertstrukturen beweisen, wobei definiert wird:

Def.4: Eine starke klassifikatorische Wertstruktur ist ein Tripel $<K, \mathbf{U}, \mathbf{O}>$, für das gilt:

a) K ist eine nichtleere, endliche Menge;
b) $\mathbf{U}$ ist eine Teilmenge von $\mathscr{P}(K)$, so dass
   I) $K\in\mathbf{U}$
   II) $X\in\mathbf{U} \supset \overline{X}\notin\mathbf{U}$
   III) $X\in\mathbf{U} \wedge Y\in\mathbf{U} \supset (X\cap Y)\in\mathbf{U}$
   IV) $X\subset Y \wedge X\in\mathbf{U} \supset Y\in\mathbf{U}$;
c) $\mathbf{O}$ ist eine Teilmenge von $\mathscr{P}(K)$-N (mit $N := \{X: \overline{X} \in\mathbf{U}\}$), so dass
   I) $X\in\mathbf{O} \supset X\notin\mathbf{U} \wedge \overline{X} \notin\mathbf{U}$
   II) $X\in\mathbf{O} \wedge Y\in\mathbf{O} \supset (X\cup Y)\in\mathbf{O}$
   III) $X\in\mathbf{O} \wedge \overline{X \cap Y} \notin\mathbf{U} \supset (X\cap Y) \in\mathbf{O}$
   IV) $X\in\mathbf{U} \wedge (X\cap Y) \in\mathbf{O} \supset Y\in\mathbf{O}$.

Die Bedingungen bI - IV) und cI - IV) stellen dabei einfach die mengentheoretischen Korrelate zu RÜ, Ü1, RÜ* bzw. O1-O4 dar; die Sub-Struktur $<K, \mathbf{U}>$ einer starken klassifikatorischen Wertstruktur $<K, \mathbf{U}, \mathbf{O}>$ ist zugleich eine starke klassifikatorische Wahrscheinlichkeitsstruktur im Sinne von Lenzen (1980), wo sich auch für schwächere (probabilistische) Strukturen einschlägige Metrisierungsresultate finden. Hier soll nun gezeigt werden, dass gilt:

METRISIERUNGSSATZ

Zu jeder starken klassifikatorischen Wertstruktur $<K, \mathbf{U}, \mathbf{O}>$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß w auf $\mathbf{P}(K)$ und eine normierte Nutzensfunktion u auf $\mathscr{P}(K)$-N, so dass für $X \subset K$:

$X \in \mathbf{U}$ gdw. $w(X) = 1$ und
$X \in \mathbf{O}$ gdw. $u(X) > 0$ und f.a. $Y \subset X$: wenn $w(Y) > 0$, dann $u(Y) > 0$.

Beweis: Da die Grundmenge K gemäß Def.4 stets endlich ist, sind auch $\mathscr{P}(K)$ und a fortiori $\mathbf{U}$ nur endlich. Setzt man $K^* := \bigcap_{X \in \mathbf{U}} X$, so gilt deshalb nach Def.4, b, III) $K^* \in \mathbf{U}$, und nach b I, II) ist $K^* \neq \emptyset$, etwa $K^* = \{k_1, \ldots, k_n\}$. Die gesuchte Mengenfunktion w definieren wir durch:

(1) $w(\{k_i\}) := 1/n$ für $i = 1, \ldots, n$
$w(\{k\}) := 0$ für $k \in K$-K^*
$w(X) := \Sigma_{k \in X}\, w(\{k\})$ für $X \subset K$.

Wie man unschwer verifiziert, gilt $w(X) \geq 0$ für $X \subset K$, $w(K^*) = w(K) = 1$ sowie $w(X \cup Y) = w(X) + w(Y)$, falls $w(X \cap Y) = 0$, d.h. w ist eine Wahrscheinlichkeit auf $\mathscr{P}(K)$. Außerdem erfüllt w die gewünschte Repräsentationsbedingung, denn für $X \in \mathbf{U}$ ist $K^* \subset X$, also $w(X) \geq w(K^*) = 1$; ist dagegen $\neg(X \in \mathbf{U})$, so kann wegen $K^* \in \mathbf{U}$ nach b IV) auch nicht gelten $K^* \subset X$; d.h. es gibt ein $k \in K^*$, etwa $k = k_i$, mit $\neg(k_i \in X)$; aus $X \subset (K$-$\{k_i\})$ folgt dann aber $w(X) \leq w(K) - w(\{k_i\}) = 1 - 1/n$, d.h. $w(X) < 1$.

Zur Definition der Nutzensfunktion u setzt man zunächst $K^+ := \bigcup_{X \in \mathbf{O}} X$. Wegen der Endlichkeit von $\mathscr{P}(K)$ gilt nach c II) $K^+ \in \mathbf{O}$; daraus folgt mit c I) $K^+ \notin \mathbf{U}$, d.h. $w(K^+) > 0$, also mit $w(K^*) = 1$ (wegen $K^* \in \mathbf{U}$) auch $w(K^+ \cap K^*) > 0$, d.h. $(\overline{K + \bigcap K^*}) \notin \mathbf{U}$, deshalb $(K^+ \cap K^*) \in \mathbf{O}$ nach c, III); ferner ist $K^+ \cap K^*$ echte Teilmenge von K^*, denn andernfalls ergäbe sich $K^* \in \mathbf{O}$ im Widerspruch zu c I). Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $K^+ \cap K^* = \{k_1, \ldots, k_m\}$ für ein $m < n$ (und $m > 0$ — andernfalls gewinnt man u trivialerweise durch $u(X) = 0$ für alle $X \subset K$ mit $w(X) > 0$).

Setzt man nun beispielsweise

(2) $u(\{k_j\}) := 1$ für $j = 1, \ldots, m$
$u(\{k_j\}) := -m/(n-m)$ für $j = m + 1, \ldots, n$
$u(X) := \Sigma_{k \in X}\, u(\{k\})\, w(\{k\}) / w(X)$ für $X \subset K$ mit $w(X) > 0$,

so wird u eine normierte Nutzensfunktion; denn es ist $u(K) = \Sigma_{1 \leq j \leq m}\, u(\{k_j\}) \times w(\{k_j\}) + \Sigma_{m+1 \leq j \leq n}\, u(\{k_j\}) \times w(\{k_j\}) + \Sigma_{k \in K\text{-}K^*}\, u(\{k\}) \times w(\{k\}) = (m \times 1 \times 1/n) + ((n-m) \times (-m/(n-m)) \times 1/n) + 0 = m/n + (-m/n) = 0$.

Ferner ergibt sich für $w(X \cap Y) = 0$: $u(X \cup Y) = \Sigma_{k \in X \cup Y}\, (u(\{k\}) \times w(\{k\}) / w(X \cup Y) = [\Sigma_{k \in X}\, (u(\{k\}) \times w(\{k\}) + \Sigma_{k \in Y}\, (u(\{k\}) \times w(\{k\})] / w(X \cup Y) = (u(X) \times w(X) + u(Y) \times w(Y)) / w(X \cup Y)$, wie zu zeigen war. Schließlich erfüllt u die fragliche Repräsentationsbedingung; denn für $X \in \mathbf{O}$ folgt wegen c I) $\overline{X} \notin \mathbf{U}$, also $w(\overline{X}) < 1$, d.h. $w(X) > 0$, und deshalb auch $u(X) > 0$; denn ist $Y \subset X$ mit $w(Y) > 0$, d.h. $\overline{Y} \notin \mathbf{U}$, so nach c III) $Y \in \mathbf{O}$, also $Y \subset K^+$, gemäß (2) ist dann $u(Y) = u(Y \cap K^*) = \Sigma_{1 \leq j \leq i}\, u(\{k_j\}) \times w(\{k_j\}) / w(Y \cap K^*) = (i \times 1 \times 1/n) / (i \times 1/n) = 1$ für ein i mit $1 \leq i \leq m$, also jedenfalls $u(Y) = 1 > 0$. Ist hingegen $X \notin \mathbf{O}$, so für $w(X) > 0$ auch nicht $(X \cap K^*) \subset K^+$; denn andernfalls würde mit $K^+ \in \mathbf{O}$ wegen $w(X) = w(X \cap K^*) > 0$ nach c III) folgen $(X \cap K^*) \in \mathbf{O}$, also mit c IV) wegen $K^* \in \mathbf{U}$ auch $X \in \mathbf{O}$ im Widerspruch zur Annahme. Es gibt also ein $k \in (X \cap K^*)$

mit $k \notin K^+$, für das dann gilt $w(\{k\}) = 1/n$ und $u(\{k\}) = -m/(n-m)$, d.h. es existiert ein $Y \subset X$ mit $w(Y) > 0$ aber $u(Y) < 0$. Damit ist der Metrisierungssatz bewiesen.

Die bisherigen Ausführungen würden – wie ich hoffe – für meine Arbeit den Titel ‚Ist optimal' rechtfertigen. Um auch das durch ‚Ist gut' gegebene Versprechen einzulösen, möchte ich abschließend eine Logik für den schwächeren Operator G zumindest skizzieren. Mit den früheren Theoremen T8, T9, T12, T14 und T16 (T10 folgt aus T12 und T9) haben wir z.B.

G1: $G(A) \supset K(A)$

G2: $G(A) \wedge G(B) \supset G(A \vee B)$

G3: $\ddot{U}(A) \supset (G(B) \equiv G(A \wedge B))$

sowie die Regel

RG: $A \equiv B \vdash G(A) \supset G(B)$

als potentielle Kandidaten für einen axiomatischen $G/\ddot{U}$-Kalkül gewonnen. Tatsächlich folgen jedoch aus den Bedingungen für normierte Nutzensfunktionen noch eine Reihe weiterer Prinzipien, darunter

T20: $G(A) \supset G(A \wedge B) \vee G(A \wedge \neg B)$

T21: $G(A) \supset G(A \vee B) \vee G(A \vee \neg B)$

Es stellt sich deshalb die Frage, ob die Hinzunahme dieser und gegebenenfalls weiterer Gesetze zu einem vollständigen System der „schwachen" Wertlogik führt.

Um diese Frage beantworten zu können, ist es unerlässlich, einen etwas komplizierten Hilfsbegriff einzuführen: den der *strikten Äquivalenz* von Satzmengen $\{A_1,\ldots,A_n\}$ und $\{B_1,\ldots,B_n\}$. Für $n \geq 1$ sollen solche Satzmengen strikt äquivalent heißen, wenn aus logischen Gründen genau so viele Sätze der ersten Menge wahr sein müssen wie Sätze aus der zweiten Menge. Symbolisiert man diesen Sachverhalt durch $\{A_1,\ldots, A_n\}S\ddot{A}\{B_1,\ldots, B_n\}$, so gilt zunächst (rein probabilistisch)[4]

T22: $\{A_1,\ldots, A_n\}S\ddot{A}\{B_1,\ldots, B_n\} \supset \Sigma_{1\leq i\leq n}\, w(A_i) = \Sigma_{1\leq i\leq n}\, w(B_i)$.

Die entsprechenden Summen der Nutzenswerte können hingegen für strikt äquivalente Satzmengen divergieren. Es lässt sich allerdings zeigen, dass mindestens ein B_i einen positiven Wert $u(B_i) > 0$ haben muss, falls mindestens ein A_i positiv und alle übrigen A_j nicht-negativ sind, d.h. es gilt die Regel:

RG_n: $\{A_1,\ldots, A_n\}S\ddot{A}\{B_1,\ldots, B_n\} \vdash G(A_1) \wedge \neg G(\neg A_2) \wedge \ldots \wedge \neg G(\neg A_n) \supset G(B_1) \vee \ldots \vee G(B_n)$.

Für $n = 1$ bedeutet $\{A_1\}S\ddot{A}\{B_1\}$, dass A_1 mit B_1 logisch äquivalent ist. Deshalb folgt aus RG_1 unmittelbar unser früheres RG. Weiterhin lassen sich für $n = 2$ aus RG_n auch die Theoreme T20 und T21 ableiten. Denn – wie der Leser leicht verifiziert – gilt $\{A, A \wedge \neg A\}S\ddot{A}$-$\{A \wedge B, A \wedge \neg B\}$; deshalb folgt aus $G(A) \wedge \neg G(\neg(A \wedge \neg A))$ gemäß RG_2 $G(A \wedge B) \vee G(A \wedge \neg B)$, so dass man wegen $\neg G(\neg(A \wedge \neg A))$ (nach G1) T20 erhält. Und T21 gewinnt man analog aus der Beziehung $\{A, A \vee \neg A\}S\ddot{A}\{A \vee B, A \vee \neg B\}$.

Übersetzt man nun die Bedingungen G1—G3, RG_n in die mengentheoretische Sprache, indem man definiert:

Def.5: Eine schwache klassifikatorische Wertstruktur ist ein Tripel $\langle K, \mathbf{U}, \mathbf{G} \rangle$, für das neben den Forderungen a), b) von Def.4 zusätzlich gilt:

c) $\mathbf{G}$ ist eine Teilmenge von $\mathscr{P}(K)$-N, so dass

I) $X \in \mathbf{G} \supset X \notin \mathbf{U} \wedge \overline{X} \notin \mathbf{U}$

II) $X \in \mathbf{G} \wedge Y \in \mathbf{G} \supset (X \cup Y) \in \mathbf{G}$

[4] Vgl. W. Lenzen, *Glauben, Wissen, Wahrscheinlichkeit* (Wien - New York 1980), spez. Kap. 4.

III) $X \in \mathbf{U} \supset ((X \cap Y) \in \mathbf{G} \equiv Y \in \mathbf{G})$
IV) für alle $n \geq 1$ und alle $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \subset K$: Wenn für alle $k \in K$ gilt: $\Sigma_{1 \leq i \leq n} \hat{X}_i(k) = \Sigma_{1 \leq i \leq n} \hat{Y}_i(k)$,[5] dann folgt aus $X_1 \in \mathbf{G} \wedge \overline{X}_2 \notin \mathbf{G} \wedge \ldots \wedge \overline{X}_n \notin \mathbf{G}$, dass $Y_1 \in \mathbf{G} \vee \ldots \vee Y_n \in \mathbf{G}$;

so gilt höchstwahrscheinlich der

METRISIERUNGSSATZ

Zu jeder schwachen klassifikatorischen Wertstruktur $\langle K, \mathbf{U}, \mathbf{G} \rangle$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß w auf $\mathbf{P}(K)$ und eine normierte Nutzensfunktion u auf $\mathscr{P}(K)$-N, so dass für $X \subset K$:

$X \in \mathbf{U}$ gdw. $w(X) = 1$ und
$X \in \mathbf{G}$ gdw. $u(X) > 0$.

Ein Beweis dieser Vermutung findet sich hoffentlich in geplanten Nachfolgearbeiten.[6] Mit seiner Hilfe wird sich dann weiter zeigen lassen, dass die skizzierte G-Logik, also das System der Aussagenlogik erweitert um Ü1, Ü2, RÜ*, G1-G3, RG_n[7] vollständig und widerspruchsfrei ist relativ zu der nachstehenden Semantik, die einfach den Inhalt von Def.3 von dem „starken“ Wertbegriff O auf den „schwachen“ Begriff G überträgt:

Def.6: Ein G-Modell ist ein Quadrupel $\langle I, w, u, V \rangle$, das den Bedingungen a) - d III) von Def.3 genügt und bei dem die Funktion V die zusätzliche Bedingung erfüllt:
IV) $V(i, G(A)) = w$ gdw. $u_i([A]) > 0$.

Weitere Details findet der Leser – wie erwähnt – wahrscheinlich in späteren Arbeiten. Hier sei abschließend nur resümiert, dass auch aufgrund der hier nur rudimentär vorgetragenen Ergebnisse das weitere Studium klassifikatorischer Wertbegriffe wie ‚ist gut’ interessant und lohnend erscheint.

---

[5] Für $X \subset K$ ist die charakteristische Funktion $\hat{X}$ von K in $\{0,1\}$ definiert durch $\hat{X}(k) = 1$ falls $k \varepsilon X$ und $\hat{X}(k) = 0$ andernfalls.

[6] Vgl. W. Lenzen, „On the representation of classificatory value-structures” in *Theory and Decision* 15 (1983), 349-369. Eine weitere, zur Veröffentlichung im *Journal of Philosophical Logic* konzipierte Arbeit „The logic of weak and strong value concepts” ist hingegen nie erschienen.

[7] Eine alternative Axiomatisierung bestünde in G1, G2 +

$G4_n$ $\quad Ü(\{A_1, \ldots, A_n\}\ SÄ\ \{B_1, \ldots, B_n\}) \supset (G(A_1) \wedge \neg G(\neg A_2) \wedge \ldots \wedge \neg G(\neg A_n) \supset G(B_1) \vee \ldots \vee G(B_n))$.

Aus $G4_n$ erhält man mit RÜ sofort RG_n und für n = 1 auch G3; dass man umgekehrt mit G3 und RG_n auch $G4_n$ beweisen kann, ist weit weniger trivial. Das hängt damit zusammen, dass – wie in Lenzen (1980) gezeigt wurde – für beliebige Sätze $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ gilt: $[A_1 \wedge \{A_1, \ldots, A_n\} SÄ \{B_1, \ldots, B_n\}, \ldots, A_n \wedge \{A_1, \ldots, A_n\} SÄ \{B_1, \ldots, B_n\}]$ $SÄ$ $[B_1 \wedge \{A_1, \ldots, A_n\} SÄ \{B_1, \ldots, B_n\}, \ldots, B_n \wedge \{A_1, \ldots, A_n\} SÄ \{B_1, \ldots, B_n\}]$.