BESCHRÄNKTE UND UNBESCHRÄNKTE REDUKTION VON KONJUNKTIONEN VON MODALITÄTEN IN S4

Wolfgang Lenzen

0. Einführung

Einige der bekannten Erweiterungen des modallogischen Systems S4 entstehen – bei Axiomatisierung im Stile von LEMMON [5] – durch Hinzunahme von Axiomen der Gestalt $Ap \supset Bp$, andere durch Axiome der Form $Ap \supset (Bp \supset Cp)$, noch andere durch solche der Gestalt $Ap \supset (Bp \supset (Cp \supset Dp))$, wobei A, B, C, D jeweils affirmative Modalitäten – im Sinne beispielsweise von [4], S. 42 – sind.[1] Für eine einheitliche Behandlung dieser Axiome und verwandter Prinzipien empfiehlt es sich, allgemein „Konjunktionen" $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ ($n \geq 1$) von Modalitäten in Betracht zu ziehen, wobei natürlich für jeden Satz p der Ausdruck $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n(p)$ gleich der normalen n-fachen Konjunktion $A_1(p) \wedge \ldots \wedge A_n(p)$ sein soll. Den unbequemen Ausdruck „Konjunktionen von Modalitäten" kürzen wir durch „KM" ab und benützen im Folgenden „K" (mit oder ohne Index) als metasprachliche Variable für KM.

Die Axiome der eingangs erwähnten S4-Erweiterungen sind also Einzelfälle des Schemas: $Kp \supset Ap$, bei dem A eine Modalität und K eine KM darstellt. Da die Umkehrungen dieser Sätze jeweils Theoreme von S4 sind, wird mit ihnen eine Reduktion der KM auf eine S4-Modalität bewirkt. Es stellt sich deshalb die Frage, ob nicht vielleicht sämtliche Kalküle aus der recht anzahlstarken und unübersichtlichen Menge der S4-Erweiterungen durch bislang ununtersuchte KM-Reduktionen charakterisierbar sind, und ob umgekehrt solche Reduktionsprinzipien eventuell zur Entdeckung neuer Kalküle der genannten Familie führen. Beide Teilfragen sind negativ zu beantworten. Im ersten Teil dieser Arbeit wird sich herausstellen, dass die Menge der durch (unbeschränkte) Reduktion beliebiger KM charakterisierbaren Kalküle eine echte – und zwar relativ kleine – Teilmenge der Menge aller bis dato bekannten S4-Erweiterungen darstellt. Und diese Inklusion besteht selbst dann fort, wenn man zusätzlich noch eine Reihe von Einschränkungen der KM-Reduktionsprinzipien in Betracht zieht, wie das in Teil 2 geschieht.

1. Unbeschränkte Reduktion von KM

Zwischen den sieben verschiedenen S4-Modalitäten L, LML, LM, ML, MLM, M und I (wobei „I" wie in [10] für die uneigentliche, „improper", Modalität steht), bestehen bekanntlich (vgl. z. B. [4], S. 48) die logischen Beziehungen, wie sie in der unten folgenden Abb. 1 dargestellt werden. Deshalb kann es im Rahmen von S4 höchstens 13 verschiedene KM geben, nämlich neben den einfachen Modalitäten noch: $I \wedge LML$, $I \wedge LM \wedge ML$, $ML \wedge LM$, $I \wedge LM$, $I \wedge ML$, $I \wedge MLM$. Auch sieht man leicht, dass zwischen ihnen jedenfalls die in Abb. 2 illustrierten logischen Beziehungen bestehen.

Weiter unten wird sich herausstellen, dass im Rahmen von S4 tatsächlich keine weiteren Beziehungen zwischen KM bestehen, dass insbesondere keiner der Pfeile von Abb. 2 umkehrbar ist und deshalb in S4 genau 13 verschiedene KM existieren.

[1] Beispiele des ersten Typs sind die weiter unten folgenden Axiome **G1**, **K1**, sowie natürlich das S5-Axiom **A8**: $Mp \supset LMp$; Beispiele des zweiten Typs sind etwa die Axiome **R1** und **L1** für die Kalküle S4.4 und S4.04, die ebenfalls weiter unten angegeben werden. Für den dritten Typ vgl. die unten folgenden Prinzipien **Γ6** und (21).

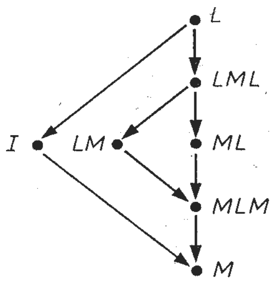

Abb. 1. Modalitäten in S4

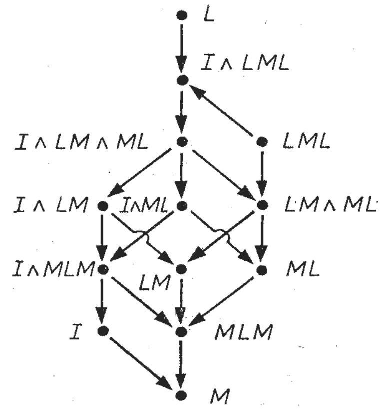

Abb. 2. Konjunktionen von Modalitäten in S4

K. E. PLEDGER hat in seiner ausführlichen Studie [10] Reduktionsprinzipien $A_1p \supset A_2p$ für (nichtkonjunktive) Modalitäten A_i in S3 – und also auch in S4 – untersucht. R. I. GOLDBLATT hat sich in [2] darüber hinausgehend mit Reduktionsprinzipien der Gestalt $A_ip \supset (p \supset Lp)$ beschäftigt, wobei $A_i \in \{L, LML, LM, ML, MLM, M, I\}$, die Notwendigkeit also in schlichte Wahrheit plus eine zusätzliche S4-Modalität „zerlegen".[2] Weiterhin hat GOLDBLATT in [3] gelegentlich der Vorstellung des neuen Kalküls S4.01 = S4 + **Γ1** mit

(**Γ1**) $MLp \supset (LMp \supset LMLp)$

darauf hingewiesen, dass PLEDGER ermittelt habe, „dass **Γ1** die einzige Instanz des Schemas $Ap \supset (Bp \supset Cp)$ – mit A, B, C als affirmativen S4-Modalitäten – sei, die nicht mit einem Axiom der [damals] bekannten Erweiterungen von S4 äquivalent sei" (vgl. [3], S. 568, Anm. 1). Die genauen Details dieses Befundes von PLEDGER sind anscheinend nicht im Druck erschienen. Sie lassen sich jedoch als Teilresultat aus der nachstehenden Tabelle 1 ablesen, in der jene S4-Erweiterungen aufgelistet sind, die sich durch Hinzunahme eines der 169 möglichen Reduktionsprinzipien $K_1p \supset K_2p$ für KM ergeben. Eine Leerstelle in der Tabelle deutet an, dass das jeweilige Reduktionsaxiom in S4 beweisbar ist. Mit „PC*" wird das triviale System bezeichnet, in dem wegen der Beweisbarkeit von $p \supset Lp$ alle modalen Unterscheidungen zusammenbrechen. Im Übrigen wird dort auf die Standardbezeichnungen der bekannten S4-Erweiterungen Bezug genommen, also insbesondere auf die Definitionen:[3]

S4.04 := S4 + **L1**,
S4.1.2 := S4.04 + **N1**,
S4.2 := S4 + **G1**,
S4.4 := S4 + **R1**,

K1 := S4 + **K1**,
K1.2 := S4 + **H1**,
K2 := S4.2 + **K1**,
K4 := S4.4 + **K1**.

Die entsprechenden Axiome lauten:

(**L1**) $p \supset (LMLp \supset Lp)$,
(**N1**) $L(L(p \supset Lp) \supset p) \supset (MLp \supset p)$,
(**G1**) $MLp \supset LMp$,

[2] Dieser Ausdruck stammt von ZEMAN, der in [15] zwei solche „Zerlegungs"-Prinzipien, nämlich **R1** und **L1**, ausführlich untersucht hat.

[3] Für S4.01 vgl. [3]; für S4.04 vgl. [15]; für S4.1.2 vgl. [14]; für S4.2 vgl. [1]; und für S4.4 vgl. [11]. Die Definitionen der K-Systeme finden sich in [12] und [13].

(**R1**) $p \supset (MLp \supset Lp)$,
(**K1**) $LMp \supset MLp$,
(**H1**) $p \supset L(Mp \supset p)$.

In der folgenden Tabelle werden die 25 trivialen Prinzipien, bei denen $K_1 = L$ bzw. $K_2 = M$ ist, überhaupt nicht berücksichtigt. Von den aufgelisteten 144 Reduktionsaxiomen erweisen sich weitere 47 als simple S4-Theoreme, und bezüglich der restlichen 97 in S4 nicht beweisbaren Prinzipien gilt – in Verallgemeinerung des oben zitierten Befundes von PLEDGER – dass jedes einzelne mit einem Axiom einer bekannten S4-Erweiterung äquivalent ist.

	I	MLM	$I \wedge MLM$	ML	LM	$I \wedge ML$	$I \wedge LM$	$ML \wedge LM$	$I \wedge ML \wedge LM$	LML	$I \wedge LML$	L
M	PC*	S5	PC*	PC*	S5	PC*	PC*	PC*	PC*	PC*	PC*	PC*
I		S5	PC*	PC*	S5	PC*	S5	PC*	PC*	PC*	PC*	PC*
MLM	PC*		PC*	K1	S4.2	PC*	PC*	K2	PC*	K2	PC*	PC*
$I\wedge MLM$				K1	S4.2	K1	S4.2	K2	K2	K2	K2	K4
ML	S5		S5		S4.2	S5	S5	S4.2	S5	S4.2	S5	S5
LM	PC*		PC*	K1		PC*	PC*	K1	PC*	K1	PC*	PC*
$I\wedge ML$					S4.2		S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.4
$I\wedge LM$				K1		K1	K1	K1	K1	K1	K1	K1.2
$ML\wedge LM$	S5		S5			S5	S5		S5	S4.01	S5	S5
$I\wedge ML\wedge LM$										S4.01	S4.01	S4.1.2
LML	S5		S5			S5	S5		S5		S5	S5
$I\wedge LML$												S4.04

Tabelle 1. Liste der S4-Erweiterungen, die sich durch Reduktionsprinzipien $K_1p \supset K_2p$ für Konjunktionen von Modalitäten ergeben

Die meisten Äquivalenzbeweise sind trivial und dürfen deshalb weggelassen werden. Einzig die Resultate der drittletzten Zeile seien hier genauer bewiesen, wobei wir uns zunächst auf die beiden folgenden Metatheoreme stützen:[4]

METATHEOREM 1.
Für jede S4-*Modalität A gilt* (*in* **T**, *also erst recht*) *in* S4 *die abgeleitete Regel*

$$\alpha \supset \beta \vdash A\alpha \supset A\beta.$$

METATHEOREM 2.
Für jede S4-*Modalität A gilt in* S4 *das Distributions- bzw. Konjunktionsprinzip*

a) $A(\alpha \supset \beta) \supset (L\alpha \supset A\beta)$, b) $A\alpha \wedge L\beta \supset A(\alpha \wedge \beta)$.

Für die zweit- und drittletzte Spalte der drittletzten Zeile von Tabelle 1 ist zu zeigen, dass man den Kalkül S4.01 alternativ zu **Γ1** auch durch das schwächere Prinzip

(**Γ6**) $p \supset (MLp \supset (LMp \supset LMLp))$

axiomatisieren kann. Der Beweis läuft wie folgt:

(1) $LMp \supset LLMp$ S4
(2) $MLM\neg p \supset MLLM\neg p$ S4

[4] Für MT1 vgl. etwa [4], S. 42; der einfache Beweis für MT2 stützt sich auf das Theorem von T (vgl. [4], S. 40): $Mp \wedge Lq \supset M(p \wedge q)$ sowie das S4-Axiom: $Lp \supset LLp$.

(3)	$MLLM\neg p \wedge LLMp \supset M(LLM\neg p \wedge LMp)$	MT2b
(4)	$LLM\neg p \wedge LMp \supset L(LM\neg p \wedge Mp)$	MT2b
(5)	$M(LLM\neg p \wedge LMp) \supset ML(LM\neg p \wedge Mp)$	MT1 (4)
(6)	$LM\neg p \wedge Mp \supset M(M\neg p \wedge p)$	MT2b
(7)	$ML(LM\neg p \wedge Mp) \supset MLM(M\neg p \wedge p)$	MT1 (6)
(8)	$(M\neg p \wedge p) \supset \neg(p \supset Lp)$	**PC**
(9)	$MLM(M\neg p \wedge p) \supset MLM\neg(p \supset Lp)$	MT1 (8)
(10)	$LMp \wedge MLM\neg p \supset MLM\neg(p \supset Lp)$	(1)-(3), (5), (7), (9), **PC**
(11)	$LMp \supset (LML(p \supset Lp) \supset LMLp)$	(10), **PC**
(12)	$\neg p \supset (p \supset Lp)$	**PC**
(13)	$Lp \supset L(p \supset Lp)$	S4
(14)	$MLp \supset ML(p \supset Lp)$	MT1 (13)
(15)	$LM(p \supset Lp)$	S2
(16)	$(\neg p \wedge MLp) \supset (p \supset Lp) \wedge ML(p \supset Lp) \wedge LM(p \supset Lp)$	(12), (14), (15)
(17)	$(p \supset Lp) \supset (ML(p \supset Lp) \supset (LM(p \supset Lp) \supset LML(p \supset Lp)))$	**Γ6**: $p/(p \supset Lp)$
(18)	$(\neg p \wedge MLp) \supset LML(p \supset Lp)$	(16), (17), **PC**
(19)	$(\neg p \wedge MLp \wedge LMp) \supset LMLp$	(11), (18), **PC**
(20)	$p \wedge MLp \wedge LMp \supset LMLp$	**Γ6**, **PC**
(**Γ1**)	$MLp \supset (LMp \supset LMLp)$	**(**19), (20), **PC**.

Also folgt im Rahmen von S4 in der Tat **Γ1** aus **Γ6**; da die umgekehrte Implikation trivial ist, stellt **Γ6** somit ein neues charakteristisches Axiom von S4.01 dar.

Bezüglich der Eintragung in der letzten Spalte der drittletzten Zeile bleibt zu verifizieren, dass das Reduktionsprinzip

(21) $p \supset (MLp \supset (LMp \supset Lp))$

als charakteristisches Axiom von S4.1.2 = {S4; **L1**; **N1**} dient. Wegen der in Abb. 1 dargestellten Beziehungen zwischen den S4-Modalitäten folgt zunächst unmittelbar **L1** aus (21); dass (21) des Weiteren auch **N1** impliziert, sieht man wie folgt:

(22)	$(p \supset Lp) \supset (ML(p \supset Lp) \supset (LM(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp)))$	(21): $p/(p \supset Lp)$
(23)	$(\neg p \wedge MLp) \supset L(p \supset Lp)$	(16), (22)
(24)	$\neg(MLp \supset p) \supset \neg(L(p \supset Lp) \supset p)$	(23), **PC**
(25)	$\neg(L(p \supset Lp) \supset p) \supset \neg L(L(p \supset Lp) \supset p)$	S1
(**N1**)	$L(L(p \supset Lp) \supset p) \supset (MLp \supset p)$	(24), (25).

Der Kalkül S4.1.2 ist also in {S4; (21)} enthalten. Umgekehrt hat GOLDBLATT gezeigt, dass aus **N1** das Axiom **Γ1** folgt (vgl. [3], S. 568). Aus der Konjunktion von **Γ1** mit **L1** folgt aber unmittelbar unser (21), das somit erst recht ein Theorem – und insgesamt also ein charakteristisches Axiom – des Kalküls S4.1.2 darstellt. Der Beweis der übrigen Äquivalenzen ist, wie gesagt, mehr oder weniger trivial.

Es zeigt sich also, dass von den bislang bekannten ca. 35 Erweiterungen von S4[5] nicht mehr als 10 durch KM-Reduktionsprinzipien darstellbar sind, nämlich – außer PC* – die Kalküle K4, K2, K1.2 und K1 der so genannten K-Familie und die Lewis-Systeme S5, S4.4, S4.2, S4.1.2, S4.04 und S4.01.

[5] Eine fast vollständige Übersicht bietet das Diagramm auf S. 574 von [3].

2. Beschränkte Reduktion von KM

In [8] hatte sich herausgestellt, dass bei einer epistemischen Deutung der Modalitäten nicht nur die Reduktionsaxiome **R1** und **L1** von besonderem Interesse waren, sondern auch die Beschränkungen dieser Prinzipien auf Sätze u. a. der Form ($Lp \supset Lq$) und ($p \supset Lp$). In [6] konnte dann genauer bewiesen werden, dass das Hinzufügen der Substitutionsinstanz

(**L1.2**) $(Lp \supset Lq) \supset (LML(Lp \supset Lq) \supset L(Lp \supset Lq))$

von **L1** zu S4 ein bis dato unbekanntes, neues System, S4.03, ergab (vgl. jedoch [7]); und einige Evidenz sprach dafür, dass es sich auch bei S4.021: = S4 + **L1.3** mit

(**L1.3**) $(p \supset Lp) \supset (LML(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp))$

bzw. bei S4.1.4: = S4 + **R1.3** mit

(**R1.3**) $(p \supset Lp) \supset (ML(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp))$

um neue Erweiterungen von S4 handeln könnte. Wenngleich sich diese letzteren Vermutungen mittlerweile als falsch erwiesen haben (vgl. [9]), so schien es doch einer näheren Untersuchung wert, ob allgemein die Beschränkung irgendeines der obigen Reduktionsprinzipien für KM auf Sätze eben der Form ($Lp \supset Lq$) oder ($p \supset Lp$) zur Entdeckung neuer Kalküle führen würde.

Es zeigte sich dabei, dass (trotz gegenteiliger a priori Wahrscheinlichkeit) kein einziger neuer Kalkül hinzukam und dass die Menge der durch beschränkte Reduktion von KM charakterisierbaren Systeme nur zwei Elemente enthielt, die nicht auch schon durch unbeschränkte Reduktion von KM gewonnen werden konnten, nämlich neben S4.03 noch S4.3.2: = S4 + **F1** mit

(**F1**) $L(Lp \supset q) \vee (MLq \supset p)$.

Die genaueren Details dieser Untersuchung finden sich in den nachstehenden Tabellen 2 und 3. Die Beweise der einzelnen Äquivalenzen sind in der Regel schwieriger als jene der Tabelle 1. Dennoch wollen wir uns aus Platzgründen auf den Nachweis einiger ausgesuchter Ergebnisse beschränken, wobei wir als weiteres Metatheorem benützen:[6]

METATHEOREM 3.
In S4.2 *gilt das Konjunktionsprinzip*
$LML\alpha \wedge LML\beta \supset LML(\alpha \wedge \beta)$.

A) Für die Resultate beispielsweise in Zeile 3 der Tabelle 2 prüft man zunächst leicht nach, dass

(26) $MLM(Lp \supset Lq) \supset L(Lp \supset Lq)$

ein Theorem von S5 ist, während man aus

(27) $MLM(Lp \supset Lq) \supset (Lp \supset Lq)$

durch Substitution $p/p \vee \neg p$ das charakteristische Axiom $MLq \supset Lq$ von S5 herleiten kann. Damit sind die Eintragungen in den Spalten 1, 3, 6, 7, 9 und 11 dieser Zeile schon gerechtfertigt.

[6] ZEMAN hat in [15], S. 253, nachgewiesen, dass in S4.2 das ML-Distributionsprinzip: $ML(p \supset q) \supset (MLp \supset MLq)$ gilt. Mit MT1, 2a folgt hieraus sofort auch das *LML*-Distributionsgesetz: $LML(Lp \supset Lq) \supset (LMLp \supset LMLq)$, und daraus MT3.

	I	MLM	$I \wedge MLM$	ML	LM	$I \wedge ML$	$I \wedge LM$	$ML \wedge LM$	$I \wedge ML \wedge LM$	LML	$I \wedge LML$	L
M	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5
I		S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5	S5
MLM	S5		S5		S4.2	S5	S5	S4.2	S5	S4.2	S5	S5
$I \wedge MLM$					S4.2		S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.3.2
ML	S5		S5		S4.2	S5	S5	S4.2	S5	S4.2	S5	S5
LM	S5		S5			S5	S5		S5		S5	S5
$I \wedge ML$					S4.2		S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.2	S4.3.2
$I \wedge LM$												S4.03
$ML \wedge LM$	S5		S5			S5	S5		S5	S4.01	S5	S5
$I \wedge ML \wedge LM$												S4.03
LML	S5		S5			S5	S5		S5		S5	S5
$I \wedge LML$												S4.03

Tabelle 2 Liste der S4-Erweiterungen, die sich durch beschränkte Reduktionsprinzipien der Form $K_1(Lp \supset Lq) \supset K_2(Lp \supset Lq)$ ergeben

Für die Spalten 5, 8 und 10 ist zu zeigen, dass

(28) $MLM(Lp \supset Lq) \supset LML(Lp \supset Lq)$

Theorem von S4.2 ist, und dass umgekehrt

(29) $MLM(Lp \supset Lq) \supset LM(Lp \supset Lq)$

das mit **G1** äquivalente (vgl. z.B. [1], S. 252) Axiom

(**G2**) $MLp \supset LMLp$

impliziert. Ersteres ergibt sich wie folgt:

(30) $\neg LML(Lp \supset Lq) \supset MLM(Lp \wedge \neg Lq)$ S1°
(31) $MLM(Lp \wedge \neg Lq) \supset MLMLp$ **PC**, MT1
(32) $MLM(Lp \wedge \neg Lq) \supset MLM\neg Lq$ **PC**, MT1
(33) $MLMLp \supset MLp$ S4
(34) $MLp \supset LMLp$ **G2**
(35) $LMLp \supset LMLLp$ S4°
(36) $MLM\neg Lq \supset MLM\neg q$ S4°
(37) $MLM\neg q \supset LMLM\neg q$ **G2**: $p/M\neg q$
(38) $\neg LML(Lp \supset Lq) \supset LMLLp \wedge LMLM\neg q$ (30)-(37), **PC**
(39) $LMLLp \wedge LMLM\neg q \supset LML(Lp \wedge M\neg q)$ MT3
(40) $Lp \wedge M\neg q \supset \neg(Lp \supset Lq)$ **PC**
(41) $LML(Lp \wedge M\neg q) \supset LML\neg(Lp \supset Lq)$ MT1 (40)
(42) $\neg LML(Lp \supset Lq) \supset LML\neg(Lp \supset Lq)$ (38), (39), (41), **PC**
(28) $MLM(Lp \supset Lq) \supset LML(Lp \supset Lq)$ (42), **PC**.

Damit ist die erste Teilbehauptung nachgewiesen. Bezüglich der zweiten hat man:

(43) $MLM(L(p \vee \neg p) \supset Lp) \supset LM(L(p \vee \neg p) \supset Lp)$ (29): $p/p \vee \neg p$; q/p
(44) $Lp \supset (L(p \vee \neg p) \supset Lp)$ **PC**
(45) $MLMLp \supset MLM(L(p \vee \neg p) \supset Lp)$ MT1 (44)

(46)	$(L(p \vee \neg p) \supset Lp) \supset Lp)$	S1°
(47)	$LM(L(p \vee \neg p) \supset Lp) \supset LMLp$	MT1 (46)
(48)	$MLMLp \supset LMLp$	(43), (45), (47)
(49)	$MLp \supset MLMLp$	S4
(**G2**)	$MLp \supset LMLp$	(48), (49).

Somit bleibt für die Zeile 3 lediglich nachzuweisen, dass – wie in Spalte 4 behauptet wird – neben den trivialen Prinzipien auch

(50) $MLM(Lp \supset Lq) \supset ML(Lp \supset Lq)$

ein S4-Theorem ist. Der Beweis läuft wie folgt:

(51)	$LM\neg(Lp \supset Lq) \supset LMLp$	**PC**, MT1
(52)	$LM\neg(Lp \supset Lq) \supset LM\neg Lq$	**PC**, MT1
(53)	$LMLp \supset LMLLp$	S4
(54)	$LM\neg Lq \supset L\neg Lq$	S4
(55)	$L\neg Lq \supset LLL\neg Lq$	S4
(56)	$LM\neg(Lq \supset Lq) \supset LMLLp \wedge LLL\neg Lq$	(51)-(55), **PC**
(57)	$LMLLp \wedge LLL\neg Lq \supset L(MLLp \wedge LL\neg Lq)$	MT2b
(58)	$MLLp \wedge LL\neg Lq \supset M(LLp \wedge L\neg Lq)$	MT2b
(59)	$L(MLLp \wedge LL\neg Lq) \supset LM(LLp \wedge L\neg Lq)$	MT1 (58)
(60)	$LLp \wedge L\neg Lq \supset L\neg(Lp \supset Lq)$	MT2b
(61)	$LM(LLp \wedge L\neg Lq) \supset LML\neg(Lp \supset Lq)$	MT1 (60)
(62)	$LM\neg(Lp \supset Lq) \supset LML\neg(Lp \supset Lq)$	(56), (57), (59), (61),**PC**
(50)	$MLM(Lp \supset Lq) \supset ML(Lp \supset Lq)$	(62), **PC**.

Bezüglich der Äquivalenzen in den übrigen Zeilen von Tabelle 2 beachte man, dass im Rahmen von S4 weiter gilt:

(63)	$LMLM(Lp \supset Lq) \supset LML(Lp \supset Lq)$	MT1 (50)
(64)	$LM(Lp \supset Lq) \supset LMLM(Lp \supset Lq)$	S4[7]
(65)	$LM(Lp \supset Lq) \supset LML(Lp \supset Lq)$	(63), (64), **PC**.

Aufgrund von (50) und (65) müssen also in den Zeilen 3 und 5 jeweils die gleichen Resultate auftreten; ferner in {4, 7}; in {6, 9, 11}; und in {8, 10, 12} sowie in den entsprechenden Spalten {2, 4}; {3, 6}; {5, 8, 10}; und {7, 9, 11}. Die einzig schwierigeren Beweise für die restlichen Äquivalenzen von Tabelle 2 betreffen die in der letzten Spalte erwähnten Kalküle S4.3.2 und S4.03; sie finden sich in [6], S. 160-162.

B) Bezüglich der Ergebnisse von Tabelle 3 beachte man zunächst, dass

(66) $LM(p \supset Lp)$

und, a fortiori, auch

(67) $MLM(p \supset Lp)$

(68) $M(p \supset Lp)$

[7] Vgl. etwa [4], S. 47.

Theoreme von T und somit erst recht von S4 sind. Deshalb fallen die Zeilen {1, 3, 6} zusammen; weiterhin auch {2, 4, 8}; {5, 9}; und {7, 10}. Und ebenso die entsprechenden Spalten {2, 5}; {1, 3, 7}; {4, 8}; {6, 9}. Wir wollen uns hier auf den Beweis der Resultate in den beiden letzten Spalten beschränken.

	I	MLM	$I \wedge MLM$	ML	LM	$I \wedge ML$	$I \wedge LM$	$ML \wedge LM$	$I \wedge ML \wedge LM$	LML	$I \wedge LML$	L
M	PC*		PC*	K1		PC*	PC*	K1	PC*	K1	PC*	PC*
I				K1		K1		K1	K1	K1	K1	K1.2
MLM	PC*		PC*	K1		PC*	PC*	K1	PC*	K1	PC*	PC*
$I \wedge MLM$				K1		K1		K1	K1	K1	K1	K1.2
ML	S5		S5			S5	S5		S5	S4.01	S5	S5
LM	PC*		PC*	K1		PC*	PC*	K1	PC*	K1	PC*	PC*
$I \wedge ML$										S4.01	S4.01	S4.1.2
$I \wedge LM$				K1		K1		K1	K1	K1	K1	K1.2
$ML \wedge LM$	S5		S5			S5	S5		S5	S4.01	S5	S5
$I \wedge ML \wedge LM$										S4.01	S4.01	S4.1.2
LML	S5		S5			S5	S5		S5		S5	S5
$I \wedge LML$												S4.04

Tabelle 3 Liste der S4-Erweiterungen, die sich durch beschränkte Reduktionsprinzipien der Form $K_1(p \supset Lp) \supset K_2(p \supset Lp)$ ergeben

Während die PC*-Ergebnisse in den Zeilen 1, 3 und 6 trivial sind, muss für Zeile 2 (bzw. 4, 8) gezeigt werden, dass

(69) $(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp)$

im Rahmen von S4 deduktiv äquivalent mit **H1** ist und

(70) $(p \supset Lp) \supset LML(p \supset Lp)$

deduktiv äquivalent mit **K1**. Nun gilt:

(71)	$\neg p \supset L(M\neg p \supset \neg p)$	**H1**: $p/\neg p$
(72)	$(M\neg p \supset \neg p) \supset (p \supset Lp)$	**PC**
(73)	$L(M\neg p \supset \neg p) \supset L(p \supset Lp)$	MT1 (72)
(74)	$\neg p \supset L(p \supset Lp)$	(71), (73)
(75)	$Lp \supset L(p \supset Lp)$	S3°
(70)	$(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp)$	(74), (75), **PC**.

Umgekehrt folgt natürlich **H1** via (74) aus (70), so dass {S4; (70)} äquivalent mit {S4; **H1**} = K1.2 ist.

Die zweite Äquivalenz ergibt sich folgendermaßen:

(76)	$LM(p \supset Lp) \supset ML(p \supset Lp)$	**K1**: $p/p \supset Lp$
(77)	$LLM(p \supset Lp) \supset LML(p \supset Lp)$	MT1 (76)
(78)	$LM(p \supset Lp) \supset LLM(p \supset Lp)$	S4
(79)	$LML(p \supset Lp)$	(77), (78), (66), **PC**
(70)	$(p \supset Lp) \supset LML(p \supset Lp)$	(79), **PC**.

Also ist (70) ein Theorem von K1. Umgekehrt folgt **K1** sogar schon aus dem schwächeren

(80) $(p \supset Lp) \supset ML(p \supset Lp)$,

was man folgendermaßen sieht:

(81)	$(\neg p \supset L\neg p) \supset ML(\neg p \supset L\neg p)$	(80): $p/\neg p$
(82)	$\neg ML(p \supset Lp) \supset p$	(80), **PC**
(83)	$\neg ML(\neg p \supset L\neg p) \supset \neg p$	(81), **PC**
(84)	$\neg(\neg ML(p \supset Lp) \wedge \neg ML(\neg p \supset L\neg p))$	(82), (83), **PC**
(85)	$Mp \wedge LM\neg p \supset M(p \wedge M\neg p)$	MT2b
(86)	$L(Mp \wedge LM\neg p) \supset LM(p \wedge M\neg p)$	MT1 (85)
(87)	$LMp \wedge LLM\neg p \supset L(Mp \wedge LM\neg p)$	MT2b
(88)	$LM\neg p \supset LLM\neg p$	S4
(89)	$LMp \wedge LM\neg p \supset LM(p \wedge M\neg p)$	(86)-(88), **PC**
(90)	$LM\neg p \wedge LM\neg\neg p \supset LM(\neg p \wedge M\neg\neg p)$	(89): $p/\neg p$
(91)	$LMp \wedge LM\neg p \supset LM(\neg p \wedge Mp)$	(90), **PC**, MT1
(92)	$LM(p\wedge M\neg p) \wedge LM(\neg p\wedge Mp) \supset \neg ML(p\supset Lp) \wedge \neg ML(\neg p\supset L\neg p)$	**PC**, MT1
(93)	$\neg(LMp \wedge LM\neg p)$	(84), (89), (91), (92),**PC**
(**K1**)	$LMp \supset MLp$	(93), **PC**.

Beachtet man weiterhin, dass

(94) $ML(p \supset Lp) \supset L(p \supset Lp)$

trivialerweise Theorem von S5 ist, so bleibt für den Nachweis der Zeilen 5, 9 und 11 nur zu zeigen, dass S4 plus

(95) $LML(p \supset Lp) \supset (p \supset Lp)$

zu S5 führt. Tatsächlich gilt:

(96)	$p \supset (\neg p \supset L\neg p)$	**PC**
(97)	$LMLp \supset LML(\neg p \supset L\neg p)$	MT1 (96)
(98)	$LML(\neg p \supset L\neg p) \supset (\neg p \supset L\neg p)$	(95): $p/\neg p$
(99)	$L\neg p \supset \neg LMLp$	S2
(100)	$LMLp \supset p$	(97)-(99), **PC**.

Wie aus Tabelle 1, Zeile 11, Spalte 1 hervorgeht (vgl. auch [4], S. 264, Anm. 274), ist aber {S4; (100)} äquivalent mit S5.

Da die Resultate in Zeile 7 (bzw. 10) und Zeile 12, Spalte 12 von Tabelle 3 schon in [9] bewiesen wurden, soll hier abschließend nur noch gezeigt werden, dass – wie aus Zeile 10, Spalte 11 hervorgeht und in Zeile 7, Spalte 10 explizit behauptet wird –

(101) $(p \supset Lp) \supset (ML(p \supset Lp) \supset LML(p \supset Lp))$

mit dem S4.01-Axiom **Γ1** deduktiv äquivalent ist. Nun hatte sich schon weiter oben herausgestellt, dass im Rahmen von S4 **Γ1** durch **Γ6** ersetzt werden darf. Aus letzterem folgt durch Substitution $p/p \supset Lp$ angesichts von (66) unmittelbar (101), und umgekehrt hat man:

(102)	$MLp \supset ML(\neg p \supset L\neg p)$	MT1 (96)
(103)	$(\neg p \supset L\neg p) \supset (ML(\neg p \supset L\neg p) \supset LML(\neg p \supset L\neg p))$	(101): $p/\neg p$
(104)	$p \wedge MLp \supset LML(\neg p \supset L\neg p)$	(96), (102), (103)

(105)	$(\neg p \supset L\neg p) \supset (Mp \supset p)$	**PC**
(106)	$LML(\neg p \supset L\neg p) \supset LML(Mp \supset p)$	MT1 (105)
(107)	$LML(Mp \supset p) \supset (LMp \supset LMLp)$	MT2a
(**Γ6**)	$p \supset (MLp \supset (LMp \supset LMLp))$	(104), (106), (107), **PC**.

Die restlichen Äquivalenzbeweise für die Tabelle 3 sind – wenn nicht trivial, so doch, zumindest unter Berücksichtigung der einschlägigen Literatur, speziell von SOBOCIŃSKI's [13] – einfach durchzuführen.

Es zeigt sich also, dass weder die unbeschränkten noch die beschränkten Reduktionsprinzipien für Konjunktionen von S4-Modalitäten zu neuen modallogischen Kalkülen führen. Gegen Ende seines Buches [16] schreibt J. J. ZEMAN: „Indem man immer weitere Systeme aus dieser Familie [nämlich jeder der regulären S4-Erweiterungen] entdeckt und untersucht, kann man sich nicht des beunruhigenden Gefühls erwehren, dass es sich dabei wortwörtlich um eine Familie handelt, die die Fähigkeit besitzt, sich fortzupflanzen und zu vermehren, und so unbegrenzt viele neue Systeme hervorzubringen." (S. 276) Die vorliegende Untersuchung zeigt so nebenbei, dass die Potenz jener Familie doch geringer ist als ZEMAN befürchtet.

Literatur

[1] DUMMETT, M. A., und E. J. LEMMON, Modal logics between S4 and S5. Diese Zeitschr. **3** (1959), 250-264.

[2] GOLDBLATT, R. I., Concerning the proper axiom for S4.04 and some related systems. Notre Dame Journal of Formal Logic **14** (1973), 392-396.

[3] GOLDBLATT, R. I., A new extension of S4. Notre Dame Journal of Formal Logic **14** (1973), 567-574.

[4] HUGHES, G. E., and M. J. CRESSWELL, An introduction to modal logic. Methuen, London 1972.

[5] LEMMON, E. J., New foundations for Lewis modal systems. J. Symb. Log. **22** (1957), 186-196.

[6] LENZEN, W., On some substitution instances of R1 and L1. Notre Dame Journal of Formal Logic **19** (1978), 159-164.

[7] LENZEN, W., A rare accident. Notre Dame Journal of Formal Logic **19** (1978), 249-250.

[8] LENZEN, W., Epistemologische Betrachtungen zu [S4, S5]. Erkenntnis **14** (1979), 33-56.

[9] LENZEN, W., S4.1.4 = S4.1.2 and S4.021 = S4.04. Notre Dame Journal of Formal Logic **19** (1978), 465-466.

[10] PLEDGER, K. E., Modalities of systems containing S3. Diese Zeitschr. **18** (1972), 267-283.

[11] SOBOCIŃSKI, B., Modal system S4.4. Notre Dame Journal of Formal Logic **5** (1964), 305-312.

[12] SOBOCIŃSKI, B., Family K of the non-Lewis modal Systems. Notre Dame Journal of Formal Logic **5** (1964), 313-318.

[13] SOBOCIŃSKI, B., Certain extensions of modal system S4. Notre Dame Journal of Formal Logic **11** (1970), 347-368.

[14] SOBOCIŃSKI, B., Note on Zeman's modal system S4.04. Notre Dame Journal of Formal Logic **11** (1970), 383-384.

[15] ZEMAN, J. J., Modal system in which necessity is "factorable". Notre Dame Journal of Formal Logic **10** (1969), 247-256.

[16] ZEMAN, J. J., Modal logic – The Lewis-modal systems. Clarendon, Oxford 1973.