

Wolfgang Lenzen

Guilielmi Pacidii Non plus ultra - oder

Eine Rekonstruktion des Leibnizschen Plus-Minus-Kalküls

Zusammenfassung

Im ersten Teil des Aufsatzes wird der im Frühsommer 1999 erschienene Band 4 der Reihe VI, "Philosophische Schriften", der Akademieausgabe von Leibnizens "Sämtliche Schriften und Briefe" kurz rezensiert. Der von der Münsteraner Leibniz-Forschungsstelle herausgegebene Band enthält auf ca. 3.000 Seiten mustergültige, textkritische Editionen von mehr als 500 Stücken, die Leibniz zwischen 1677 und 1690 abgefaßt hat. Ein wichtiger thematischer Schwerpunkt umfaßt die "Scientia Generalis, Characteristica, Calculus universalis", zu denen insbesondere zahlreiche Fragmente eines um 1687 entwickelten logischen Kalküls gehören. Der Hauptteil des Aufsatzes liefert eine detaillierte Rekonstruktion dieses sogenannten Plus-Minus-Kalküls, der mit seinen Operatoren der "Addition" und "Subtraktion", der Identität und Inklusion, des "Nichts", der "Kommunikanz" und des "Kommune" eine interessante Variante zur Booleschen Mengenalgebra darstellt.

Abstract

In the first part of this paper a short review of the recently published 4th volume of Series 6 ("Philosophical Writings") of the Akademie-Ausgabe of Leibniz's "Sämtliche Schriften und Briefe" is given. This 3,000-page volume was edited by the Leibniz-Forschungsstelle in Münster, Germany. It contains unsurpassable, text-critical versions of more than 500 pieces which Leibniz composed between 1677 and 1690. One major topic dealt with in these essays is "Scientia Generalis, Characteristica, Calculus universalis". Here we find in particular various fragments of a logical calculus that Leibniz developed around 1687. The main part of this paper presents a detailed reconstruction of this so-called "Plus-Minus-Calculus" which by way of its somewhat unorthodox operators of "addition" and "subtraction", inclusion and identity, "communication", "commune" and "Nothing" provides an interesting alternative for the Boolean algebra of sets.

Gliederung:

- 1 [Einleitung](#)
- 2 [Die Textgrundlage des Plus-Minus-Kalküls](#)
- 3 [Zu den Übersetzungen des Plus-Minus-Kalküls](#)
- 4 [Der Plus-Kalkül](#)

- 5 [Der Plus-Minus-Kalkül](#)
- 5.1 [Das Nichts](#)
- 5.2 [Kommunikanz](#)
- 5.3 [Die Minus-Operation](#)
- 5.4 [Kommune und Proprium](#)
- 6 [Schlußbemerkung](#)
- 7 [Literatur](#)

1 Einleitung

Im Frühsommer 1999 erschien der 4. Band der 6. Reihe der Akademieausgabe von Leibnizens *Sämtliche Schriften und Briefe* (im folgenden abgekürzt als 'A VI, 4'). Einige Wochen später erfuhr man aus dem Prospekt des Akademie-Verlags Berlin unter der Rubrik "Zuletzt erschienen" lakonisch die folgenden Fakten über das hier zu besprechende Werk:

Sechste Reihe: Philosophische Schriften

Herausgegeben von der Leibniz-Forschungsstelle der Universität Münster

Band 4: 1677 – Juni 1690

Bearbeitet von Heinrich Schepers, Martin Schneider, Gerhard Biller, Ursula Franke und Herma Kliege-Biller

1999. XCI, 2949 Seiten in 3 Teilbdn., Registerband: 500 S. – 190 x 248 mm, Gb., DM 1.400,-

Stutzt das Auge zunächst über den gewaltigen Preis von weit über Tausend Mark, so realisiert man bald darauf mit Verwunderung auch die anderen Dimensionen, die einen solchen Preis – unter quantitativem Aspekt – durchaus rechtfertigen könnten. Denn der *eine* Band 4 besteht de facto aus *drei* "fetten" Teilbänden mit insgesamt knapp 3000 Seiten; dazu kommt ein Registerband mit 500 Seiten; das macht alles zusammen in einem soliden Schuber gut 8 Kilogramm Leibniz und damit einen Durchschnittspreis von 175 DM/Kilo, der – beiläufig erwähnt – nur unwesentlich höher liegt als der Kilopreis eines "billigen" Reclam-Heftchens (wie z.B. meiner kürzlich erschienenen bioethischen Studie *Liebe, Leben, Tod*: ca. 150 g, 15,- DM).

Die Idee einer Akademieausgabe von Leibnizens *Sämtliche Schriften und Briefe* wurde zu Beginn dieses Jahrhunderts von der französischen Académie des sciences morales et politiques bzw. der Académie des sciences zusammen mit der Preußischen Akademie der Wissenschaften entworfen. Aufgrund der politischen Entwicklung wurde die Editionsarbeit dann jedoch ohne Beteiligung der Franzosen alleine durch die Preußische Akademie in Angriff genommen und nach dem 2. Weltkrieg entsprechend von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin fortgesetzt. Seit der Wiedervereinigung ist an die Stelle der (Ost-)Deutschen Akademie bzw. der Akademie der Wissenschaften der DDR die Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften getreten, die bei dem Projekt der Leibniz-Ausgabe mittlerweile durch die Akademie der Wissenschaften in Göttingen unterstützt wird.

Für die Herausgabe der Reihe VI der Philosophischen Schriften war zunächst Paul Ritter verantwortlich. Unter seiner Leitung erschien 1930 der von Willy Kabitz bearbeitete 1. Band mit Schriften aus der Zeit von 1663 – 1672. In der Einleitung wurde das grundlegende Editionsprinzip erläutert,

demzufolge Leibnizens Schriften primär chronologisch und sekundär nach inhaltlichen Gesichtspunkten zusammengefaßt bzw. herausgegeben werden sollten. Dieses Prinzip gilt auch für die folgenden Bände, die seit 1962 von der Leibniz-Forschungsstelle der Universität Münster herausgegeben werden. Unter der Leitung von Erich Hochstetter erschien 1962 zunächst (außerhalb der normalen Reihenfolge) Band 6 mit den *Nouveaux Essais* und sachlich verwandten Schriften aus der Zeit von 1695 – 1708; dieser Band wurde von André Robinet und Heinrich Schepers bearbeitet. 1966 folgte der von Willy Kabitz und Heinrich Schepers bearbeitete Band 2 mit weiteren, nicht in Band 1 enthaltenen Schriften aus der Zeit von 1663 – 1672. Band 3 mit Schriften aus dem Zeitraum von 1672 – 1676 wurde dann 1981 von dem neuen Direktor der Leibniz-Forschungsstelle, Heinrich Schepers, herausgegeben, der diesen Band auch zusammen mit Werner Schneiders und Willy Kabitz bearbeitet hatte. Der nun erschienene, wiederum unter der Leitung von Heinrich Schepers herausgegebene und bearbeitete Band 4 schließt einen Großteil der Lücke zwischen Band 3 und Band 6, indem er all jene philosophischen Schriften publiziert, die Leibniz mutmaßlich im Zeitraum von 1677 bis Juni 1690 verfaßt hat. Diese Arbeiten sind inhaltlich in sechs Hauptbereiche unterteilt:

- 211 Schriften im Umfang von insgesamt mehr als 1.000 Seiten zur "Scientia Generalis, Characteristica, Calculus universalis"; ergänzend zu diesem Themenbereich 36 "Excerpta et Notae Marginales" von Leibniz aus bzw. zu Schriften speziell von Descartes, Mariotte, Jungius und Alsted;
- 82 Schriften plus 22 "Excerpta et Notae Marginales" zur Metaphysik (im weiteren Sinn);
- 29 Abhandlungen + 4 Exzerpte zur Naturphilosophie;
- 37 Abhandlungen + 31 Exzerpte zur Theologie;
- 25 Abhandlungen + 9 Exzerpte zu Fragen der Moralphilosophie, sowie
- 24 Abhandlungen + 4 Exzerpte zur "Scientia Juris Naturalis".

Das Material ist auf drei annähernd gleich starke Teilbände (A, B und C) verteilt und wird um einen 500 Seiten umfassenden Registerband ergänzt, der u.a. ein Verzeichnis der Personen und der Schriften enthält, auf die Leibniz direkt oder indirekt Bezug nimmt, sowie diverse Konkordanzen zwischen den hier gedruckten Schriften und früheren Editionen. Das wichtigste Instrument für den Forscher ist jedoch der mehr als 300 Seiten lange, äußerst umfassende und penibel erarbeitete Sachindex, der nicht nur - wie sonst üblich - die Angabe der Seiten, sondern auch der *Zeilen* enthält, in denen der jeweilige Begriff auftaucht! Natürlich konnte der Rezensent die Vollständigkeit und Zuverlässigkeit dieses Registers nicht in der Form überprüfen, daß er systematisch alle Vorkommnisse aller Stichworte kontrolliert hätte. Eine kleine Stichprobe mit wenigen Begriffen, die für den "Plus-Minus-Kalkül" von besonderer Relevanz sind, hat ihn jedoch von der hervorragenden Qualität des Sachverzeichnisses ohne Einschränkung überzeugt.

A VI, 4 ist nicht nur wegen des riesigen Umfangs, sondern auch wegen der inhaltlichen Disparatheit der mehr als 400 Stücke kein Buch, das ein einzelner Forscher komplett "am Stück" lesen wird. Deshalb sollte man hier auch keine normale Rezension des Werkes erwarten. Ich möchte stattdessen den Wert bzw. Nutzen des Bandes punktuell-exemplarisch dadurch beleuchten, daß ich ihn für die Rekonstruktion des sog. "Plus-Minus-Kalküls" zugrundelege. Die wichtigsten, für diesen Kalkül einschlägigen Fragmente standen – in mehr oder minder brauchbarer Form – bereits in

früheren Editionen der philosophischen bzw. logischen Schriften von Leibniz zur Verfügung. Auch haben sich schon viele andere Leibniz-Forscher um eine adäquate Interpretation dieses Kalküls bemüht. Die folgenden Ausführungen werden jedoch zeigen, daß eine zuverlässige Rekonstruktion der logischen Bedeutung des Plus-Minus-Kalküls (und seiner Genese im Leibnizschen Denken) nur bei genauester Kenntnis der Schriften möglich ist, wie sie alleine durch die Akademieausgabe eröffnet wird. Erst jetzt steht dem Leibniz-Forscher eine Edition zur Verfügung, die alle für das Verständnis des Plus-Minus-Kalküls relevanten Fragmente in einem systematischen Zusammenhang und in einer vollständigen, mustergültigen, textkritischen Version präsentiert.

2 Die Textgrundlage des Plus-Minus-Kalküls

Vermutlich im Jahre 1687 verfaßte Leibniz mehrere Skizzen und Entwürfe eines logischen Kalküls, dessen Hauptoperatoren durch das '+'- bzw. das '-' Zeichen symbolisiert werden und der deshalb heute üblicherweise als Plus-Minus-Kalkül bezeichnet wird. Um den Unterschied der dort untersuchten *logischen* Operatoren von den anderenorts behandelten *mathematischen* Operatoren zu markieren, hat Leibniz statt '+' und '-' gelegentlich entsprechende eingekreiste Symbole verwendet. Da dieser typographische Unterschied jedoch sachlich ohne Belang ist, benutzen wir im folgenden auch bei Zitaten der Einfachheit halber immer '+' und '-'.

Die wichtigsten (und am sorgfältigsten ausgearbeiteten) Entwürfe des Plus-Minus-Kalküls sind das von Leibniz ursprünglich so betitelte "Non inelegans Specimen Demonstrandi in abstractis", das in A VI, 4 die # 178 trägt, sowie als # 177 das "Specimen Calculi Coincidentium et Inexistentium", welches jedoch nur die Plus- und nicht die Minus-Operation behandelt. Von diesen Entwürfen existieren zahlreiche frühere Editionen und Übersetzungen. So erschien # 178 bereits 1840 in der Erdmann-Edition von Leibnizens *Opera Philosophica* und dann 1890 – in ergänzter und verbesserter Fassung – zusammen mit # 177 in Band 7 der Gerhardt-Edition der *Philosophischen Schriften*. Deutsche Übersetzungen beider Entwürfe finden sich in Schmidts Edition der *Fragmente zur Logik* von 1960. Eine neuere, im allgemeinen elegantere Übersetzung von # 178 ist (zusammen mit dem lateinischen Original) auch in Herrings 1992 hrg. Sammlung von *Schriften zur Logik* enthalten. Ferner finden sich z.B. englische Übersetzungen beider Fragmente im Anhang zu Lewis' *Survey of Symbolic Logic* aus dem Jahre 1918 und in Parkinson's Sammlung der *Logical Papers* von 1966. Wie sich im folgenden zeigen wird, ist eine konsistente, verlässliche Interpretation des Plus-Minus-Kalküls aufgrund dieser früheren Textausgaben allerdings kaum möglich. Erst die nun erschienene Akademieausgabe gibt die entscheidenden Hinweise darauf, welche Gedanken und Intuitionen Leibniz zur Aufstellung dieser und jener "Gesetze" speziell für die Minus-Operation leiteten; welche der teilweise sich widersprechenden Prinzipien als bloß vorläufige, später aufgegebenen Versuche anzusehen sind und wie eine den Leibnizschen Ideen so weit wie möglich entsprechende Rekonstruktion des Plus-Minus-Kalküls auszusehen hat.

Für eine adäquate Interpretation der Leibnizschen Gedanken sind nicht nur die Hauptentwürfe # 177, 178 zu berücksichtigen, sondern auch eine Reihe kleinerer Fragmente, die teilweise schon in Couturat's Edition der *Opuscles et fragments inédits* aus dem Jahre 1903 abgedruckt wurden. Die wichtigsten Vorstudien zum Plus-Minus-Kalkül sind das "Specimen Calculi Coincidentium" (# 173) sowie "De Calculo Irrepetibilium" (# 179), dessen "Teildruck" in C. 256 freilich nur ca. 1/8 des gesamten, nun zur Verfügung stehenden Textes enthielt. Weitere einschlägige Vorarbeiten und Erörterungen von Detailproblemen finden sich in den Fragmenten # 174 (vgl. C. 251), 175, 180 (vgl. C. 250-251) und 181 (vgl. C. 251-252).

Schließlich wird die Leibnizsche Konzeption der (dort allerdings durch ein anderes Symbol dargestellten) Minus-Operation auch durch ein paar kurze Abschnitte aus dem Fragment # 184 (vgl. C. 273-276) beleuchtet.

Im folgenden sollen zunächst die Hauptunterschiede zwischen den jeweiligen Textfassungen beschrieben werden. Grob und pauschal kann man sagen, daß die Genauigkeit bzw. Verlässlichkeit der Edition der Leibnizschen Schriften im Laufe der Zeit deutlich zugenommen hat. Die älteste Ausgabe der Logikkalküle durch Erdmann ist eindeutig die unzuverlässigste: Erdmann vermochte viele wichtige Passagen in Leibnizens Manuskript gar nicht zu entziffern und hat sie – teilweise kommentarlos – einfach weggelassen. Gerhardts Ausgabe der beiden Hauptfragmente ist demgegenüber deutlich vollständiger und zuverlässiger; aber auch er vermochte einige wichtige, von Leibniz mit sehr kleinen Buchstaben an den Rand gekritzelten Passagen nicht zu entziffern. Darüber hinaus fehlt bei Gerhardt jeder Hinweis auf Veränderungen, Streichungen, Vorfassungen und Ergänzungen des Textes. Ansätze eines solchen textkritischen Apparats finden sich zum ersten Mal in Couturat's Edition, die die Gerhardt-Ausgabe auch in puncto Genauigkeit zu übertreffen scheint, wenngleich ein direkter Vergleich nicht möglich ist. Die Akademieausgabe schließlich überragt alle Vorgänger-Editionen nicht nur hinsichtlich der Genauigkeit bzw. Zuverlässigkeit der Wiedergabe der Endfassung der Leibnizschen Ausführungen, sondern überzeugt vor allem durch den äußerst detaillierten textkritischen Apparat, der ein unerlässliches Instrument für die Rekonstruktion der Genese des Textes und damit für die Interpretation der Leibnizschen Ideen darstellt. Die editorische Qualität der Akademieausgabe hat mittlerweile ein Niveau erreicht, das schlechthin nicht mehr zu übertreffen scheint und das die im Titel dieses Aufsatzes angedeutete Einstufung als 'Non plus ultra' nahelegt.

Es folgt nun zunächst eine Gegenüberstellung einiger relevanter Passagen des Fragments # 178 in den Ausgaben von Erdmann, Gerhardt bzw. der Akademieausgabe.

Erdmann, S. 94-95	Gerhardt Bd. 7, S. 228-230	Akademieausgabe S. 846-848
<i>Defin. 3.</i> Si plura simul sumta coincidunt uni plurium, quodlibet dicitur <i>inesse</i> vel <i>contineri</i> in uno isto, ipsum autem unum dicitur <i>continens</i> (et contra: si quid insit alteri, erit inter plura simul coincidentia illi alteri). Ut si A et B simul sumta coincidunt ipsi L, A ut et B dicitur <i>inexistens</i> vel <i>contentum</i>, at L dicitur <i>continens</i>.	<i>Defin. 3.</i> Si plura simul sumta coincidunt uni, plurium quodlibet dicitur <i>inesse</i> vel <i>contineri</i> in uno isto, ipsum autem Unum dicitur <i>continens</i>. Et contra, si quid insit alteri, erit inter plura simul coincidentia illi alteri. Ut si A et B simul sumta coincidunt ipsi L, A ut et B dicitur <i>inexistens</i> vel <i>contentum</i>; at L dicitur <i>continens</i>. Fieri tamen potest, ut <i>continens</i> et <i>contentum</i> coincidunt, ut si sit $A \text{ et } B \infty L$, et coincidunt A et L, tunc enim B nihil aliud continebit quam A	DEF. 3. Si plura simul sumta coincidunt uni; plurium quodlibet dicitur <i>inesse</i> vel <i>contineri</i> in uno isto, ipsum autem Unum dicitur <i>continens</i>. Et contra, si quid insit alteri, erit inter plura simul coincidentia illi alteri. Ut si A et B simul sumta coincidunt ipsi L; A ut et B dicitur <i>inexistens</i> vel <i>contentum</i>, at L dicitur <i>continens</i>. Fieri tamen potest, ut <i>continens</i> et <i>contentum</i> coincidunt, ut si sit $A+B\infty L$, et coincidunt A et L, tunc enim B nihil aliud continebit quam A, sed

	 significet <i>A</i> , significabit <i>Nihil</i> .	si non significet <i>A</i> , significabit <i>Nihil</i> .
<i>Defin. 6.</i> Si unum aliquod pluribus simul positis aut remotis coincidit, plura illa dicuntur <i>constituentia</i>. <i>Scholium</i>	<i>Def. 6.</i> Si unum aliquod pluribus simul positis aut remotis coincidere ponatur, plura illa dicuntur <i>constituentia</i>, unum autem <i>constitutum</i>. <i>Schol.</i> Hinc omnia quidem inexistencia sunt <i>constituentia</i>, sed non contra, ut $L - A \infty N$, utique non inest L in A.	DEF: 6. Si unum aliquod pluribus simul positis aut remotis coincidere ponatur, plura illa dicuntur <i>constituentia</i>, unum autem <i>constitutum</i>. SCHOLIUM: Hinc omnia quidem inexistencia sunt <i>constituentia</i>, sed non contra, ut $L - A \infty N$, utique non inest L in $[N]$.
<i>Defin. 7.</i> Constitutio (hoc est positio aut detractio) vel expressa est vel <i>tacita</i>.	<i>Def. 7.</i> Constitutio (hoc est positio aut detractio) vel tacita vel expressa est. N vel $-M$ tacita ipsius M, ut A vel $-A$ cui inest N. Expresse ipsius N patet.	DEF. 7. Constitutio (hoc est positio aut detractio) vel tacita vel expressa est. Expresse ipsius $[M]$ patet ut M vel $-M$, tacita ipsius M, ut A vel $-A$ cui inest M.
<i>Defin. 8.</i> <i>Compensatio</i> est, cum idem ponatur et detrahatur in eodem. <i>Destructio</i> est cum quid abjicitur, ut non amplius exprimatur, ut pro $M - M$ ponendo <i>Nihil</i>.	<i>Def. 8.</i> <i>Compensatio</i> est, cum idem ponitur et detrahatur in eodem, expressa cum expressa. <i>Destructio</i> est cum quid ob compensationem abjicitur, ut non amplius exprimatur et pro $M - M$ ponendo <i>Nihil</i>.	DEF. 8: <i>Compensatio</i> est, cum idem ponitur et detrahatur in eodem, expressa cum expresse. <i>Destructio</i> est cum quid ob compensationem abjicitur, ut non amplius exprimatur, ut pro $M - M$ ponendo <i>Nihil</i>.

Sieht man von bloßen Formalia wie Interpunktionen, Wortformen (Konjunktiv vs. Indikativ), Hervorhebungen etc. ab und konzentriert sich auf die mehr oder weniger sinnstörenden Fehler, so bleibt zunächst festzustellen, daß Erdmanns Edition eine ganze Reihe von *Lücken* aufweist. Bezüglich der Auslassungen innerhalb von Def. 6 - 8 erläuterte der Herausgeber zu seiner Entschuldigung:

"Cum Def. 6 - 8 et Scholion in margine Autographi scripta sint tam parvis literis iisdemque partim deletis, ut vix cerni, nedum legi queant, non potui quin aliqua verba omitterem."

Daß er jedoch auch den Schlußsatz von Def. 3 unter den Tisch fallen ließ, weil er als kleingeschriebene Marginalie ebenfalls nur schwer zu entziffern war, verschweigt Erdmann. Ebenso fehlt in seiner Edition von Def. 6 ohne jede Anmerkung bzw. Begründung die Ausführung 'unum

autem *constitutum*'. Außerdem verstümmelte Erdmann das spätere Axiom 2, indem er die auf "Si idem ponitur et detrahitur, quicquid inde in alio constituitur, coincidit *Nihilo*" folgenden Erläuterungen:

"Seu A (quotiescunque in aliqua re constituenda ponitur) $- A$ (quotiescunque ex eadem detrahitur) ∞ *Nih.*

Schol. Unde $A-A$ vel $(A+A) - A$ vel $A-(A+A)$ etc. ∞ *Nih.* Nam per Ax. 1 res semper redit ad $A-A$ "

dem Leser ohne jeden Kommentar vorenthielt.

Gerhardt vermochte zwar die gravierenden Lücken der Erdmann-Ausgabe einigermaßen zu schließen. Leider hat er jedoch den Text von Def. 7 sinnentstellend ediert, weil er Leibnizens nachträgliche Einfügung der Worte 'Expressa ipsius N patet ut' nicht als solche erkannte und deshalb nicht an die richtige Stelle vor die Ausführungen ' N vel $-M$...', sondern an den Schluß der Definition setzte. Außerdem las Gerhardt zwei Vorkommnisse des Terms ' N ' irrtümlicherweise als ' M ', wodurch das Verständnis der Definition einer expliziten bzw. impliziten Konstitution ("constitutio expressa" bzw. "constitutio tacita") zusätzlich erschwert wird. Nur wenn man den logischen Gehalt der fraglichen Definition versteht, ist man dann auch in der Lage, den kleinen Leibnizschen Lapsus, auf den in der Akademieausgabe durch 'Expressa ipsius [M] patet' hingewiesen wird, zu korrigieren. Der textkritische Apparat (A VI, 4, 848):

"11 Expressa | ipsius | *N ändert Hrsg.* | *erg.* | patet ut (1) N , $-N$, tacita vero (2) M *L*"

enthüllt, wie es zu diesem Lapsus gekommen war. Da der Durchschnittsleser mit den Konventionen der Akademieausgabe kaum vertraut sein dürfte, zunächst ein paar Erläuterungen. Die einleitende '11' verweist auf die Zeile, in der sich die fragliche Textpassage findet. Das im Haupttext eingeklammerte [M] zusammen mit der Erläuterung '*N ändert Hrsg.*' bedeutet, daß Leibnizens N zu M verbessert wurde. Der Kommentar '*erg.*' besagt, daß die durch senkrechte Striche markierte Passage 'ipsius N ' (von Leibniz) nachträglich eingefügt wurde. Die folgenden Varianten (1) und (2) zeigen (im Zusammenhang mit der abschließenden Angabe ' L '), daß Leibniz hinter 'patet ut' zunächst geschrieben hatte: ' N , $-N$; tacita vero', dies jedoch nachher zu der Endfassung ' M vel $-M$, tacita ipsius M ...' veränderte. Zusammengefaßt läßt sich die Genese von Def. 7 also wie folgt beschreiben. Die erste Fassung "Constitutio (hoc est positio aut detractio) vel tacita vel expressa est. Expressa ipsius N patet ut N , $-N$, tacita vero" wurde abgelöst durch "Constitutio (hoc est positio aut detractio) vel tacita vel expressa est. Expressa ipsius N patet ut M vel $-M$, tacita ipsius M ut A vel $-A$, cui inest M ." Im Rahmen dieser Veränderung vergaß Leibniz jedoch, das ' N ' hinter 'Expressa ipsius' zu ' M ' zu verbessern.

Bei dieser Gelegenheit sei kurz auf die grundsätzliche Frage eingegangen, in welcher Form ein Herausgeber den authentischen Text eines Autor korrigieren darf bzw. soll. Beginnen wir mit einem banalen Beispiel. In einem Scholium zu "AXIOMA 1. Si idem secum ipso sumatur, nihil constituitur novum, seu $A+A \infty A$ " wies Leibniz darauf hin, daß dieses Gesetz nur für den Bereich realer Gegenstände, nicht hingegen (wie in der Arithmetik) für Größen bzw. Zahlen gilt:

"Equidem in numeris $2+2$ facit [4], seu bini nummi binis additi faciunt quatuor nummos, sed tunc bini additi sunt alii a prioribus; si iidem essent, nihil novi prodiret, et perinde esset ac si joco, ex tribus ovis facere vellemus sex, numerando primum 3 ova, deinde uno sublato residua 2, ac denique uno rursus sublato residuum 1" (A VI, 4, 848).

Der textkritische Apparat der Akademieausgabe zeigt nun, daß Leibniz ursprünglich '4+4 facit 8' geschrieben hatte, dann aber die Ziffern '4' jeweils in '2' abänderte. Dabei vergaß er, die '8' entsprechend in '4' zu korrigieren. Erdmann (S. 95) edierte diese Stelle durch Abdruck der ursprünglichen Version '4+4 facit 8'; Gerhardt (Bd. 7, S. 230) hingegen setzte die Leibnizsche Änderung selbständig fort und korrigiert den Text zu '2+2 facit 4'. Angesichts der folgenden Illustration mit den zwei plus zwei Münzen ist dies sicher sinnvoller als Erdmanns Variante. Trotzdem sollte man auch eine solche, inhaltlich unproblematische Korrektur im Text entsprechend kennzeichnen, wie dies in A VI, 4, S. 848 durch '2+2 facit [4]' zusammen mit den textkritischen Hinweisen "numerus (1) 4+4 (2) 2+2 L" und " 8 L ändert Hrsg." vorbildlich geschieht.

Das oben reproduzierte Scholium zu Def. 6 liefert ein etwas problematischeres Beispiel einer Korrektur durch den Herausgeber. Um das Problem verständlich zu machen, muß man den vorangehenden Kontext mit betrachten. In Def. 3 wurden die "Summanden" A, B eines Terms $L = A+B$ als enthaltene ("contenta") bzw. "darinexistierende" ("inexistentia") Terme bezeichnet, und L selber als der enthaltende ("continens") Term. Im folgenden Scholium führt Leibniz dann den alternativen Sprachgebrauch ein, demzufolge für $L = A+B$ die Terme A und B die Konstituenten ("constituentia") von L darstellen und L selber der konstituierte Term ist. Mit Def. 5 wird anschließend die Minus-Operation $L-A$, d.h. die "Wegnahme" ("detractio") eines zunächst in L enthaltenen Terms A erläutert, und das Ergebnis dieser Operation, $N = L-A$, wird als der Rest ("Residuum") bezeichnet. Im weiteren Verlauf der Überlegungen, d.h. innerhalb von Def. 6, erklärt Leibniz, daß nicht nur – wie oben – die Komponenten einer Addition, $A+B$, sondern entsprechend auch die Komponenten einer Subtraktion, $A-B$, als "Konstituenten" bezeichnet werden sollen. Aus diesem verallgemeinerten Sprachgebrauch folgt, daß alle "enthaltenen" Terme Konstituenten sind, aber nicht jeder Konstituent ein "enthaltener" Term ist, denn für $L = (A-B)$ ist insbesondere B ein Konstituent von L, aber B ist nicht in L enthalten. Ebenso ist, wenn B von A subtrahiert wird, der andere Konstituent, A, in aller Regel nicht mehr (ganz) in L enthalten.

Leibniz, der sich im Rahmen von Def. 5 für die formale Darstellung der Subtraktion anderer Symbole bediente, nämlich statt $L = (A-B)$ die Gleichung $(L-A) = N$ benutzte, hätte deshalb seine Erkenntnis "Hinc omnia quidem inexistentia sunt constituentia, sed non contra" entsprechend durch den Hinweis erläutern sollen: "utique non inest A in N" bzw. eventuell auch durch "utique non inest L in N". De facto schrieb er jedoch "utique non inest L in A". Dieser Lapsus wird innerhalb der Akademieausgabe zu dem sachlich durchaus vertretbaren "utique non inest L in [N]" korrigiert. Eine alternative Korrektur im Sinne von "utique non inest [A] in [N]" wäre jedoch ebenso vertretbar bzw. dem logischen Sachverhalt sogar noch etwas angemessener gewesen.

3 Zu den Übersetzungen des Plus-Minus-Kalküls

Die oben analysierten Fehler und Ungenauigkeiten der Gerhardt-Ausgabe pflanzen sich natürlich in allen Übersetzungen fort, die auf dieser Edition beruhen. Zusammen mit manchmal recht eigentümlichen Interpretationsversuchen ergibt sich dann ein Text, der den des Originals nicht kundigen bzw. des Lateinischen nicht mächtigen Leser vor fast unüberwindbare Verständnisschwierigkeiten stellt. Man vergleiche die folgende Synopse der einschlägigen Passagen der *deutschen* Übersetzungen Schmidt (1960) und Herring (1992), denen mein eigener, auf der Akademieausgabe basierender Übersetzungsvorschlag gegenübergestellt ist:

Schmidt (1960), S. 317	Herring (1992) S. 161-163	Eigener Vorschlag
Definition 6. Wenn von einem Etwas gesetzt wird, daß es mit mehreren zusammenfällt, welches zugleich gesetzt oder entfernt worden ist, so heißt dieses mehrere die "Konstituentien", das eine aber "konstituiert".	<i>Definition 6.</i> Wenn von irgendeinem Begriff behauptet wird, er stimme mit einigen überein, die gleichzeitig hinzugefügt oder abgezogen werden, so werden diese <i>bestimmende</i> , der eine aber der <i>bestimmte</i> genannt.	<i>Definition 6.</i> Wenn angenommen wird, daß eine Entität mit mehreren hinzugefügten oder weggenommenen Entitäten zusammenfällt, so heißen jene mehreren die <i>Konstituenten</i> , die eine hingegen das <i>Konstituierte</i> .
Daher ist alles Darin-Existierende konstituierend, jedoch nicht umgekehrt; wie $L-A \infty N$: keineswegs ist dann L in A.	<i>Anmerkung:</i> Daher sind alle in anderen Seienden bestimmende, doch nicht umgekehrt: etwa $L-A = N$, obgleich L nicht in A ist.	<i>Anmerkung.</i> Deshalb sind zwar alle enthaltenen Entitäten Konstituenten, aber nicht umgekehrt, wie z.B. wenn $L-A = N$, wo jedenfalls L [bzw. A] nicht in N enthalten ist.
Definition 7. Die Konstitution (das ist die Setzung oder die Wegnahme) ist entweder stillschweigend oder ausdrücklich dargestellt. N oder – M stillschweigend von M, wie A oder – A, in welchem N ist; dargestellt offenbar von N.	<i>Definition 7.</i> Die Bestimmung (das ist Addition oder Subtraktion) ist entweder eine stillschweigende oder eine ausdrückliche. N oder –M ist die stillschweigende Bestimmung von M, wie A oder –A, worin N ist. Die ausdrückliche Bestimmung von N ist offensichtlich.	<i>Definition 7.</i> Die Konstitution (d.h. die Hinzufügung oder die Wegnahme) ist entweder <i>implizit</i> oder <i>explizit</i> . Die explizite Konstitution von M ist offenkundig, z.B. in der Form M bzw. – M; eine implizite Konstitution von M geschieht in der Form A bzw. –A, sofern M in A ist.
Definition 8. Eine Kompensation ist, wenn dasselbe in demselben gesetzt und abgezogen wird, dargestellt, wenn dargestellt. Eine Destruktion ist es, wenn etwas wegen einer Kompensation weggetan wird, so daß	<i>Definition 8.</i> <i>Kompensation</i> liegt vor, wenn der gleiche Begriff dem gleichen Begriff hinzugefügt oder abgezogen wird. <i>Destruktion</i> liegt vor, wenn ein Begriff wegen der Kompensation aufgegeben wird, so	<i>Definition 8.</i> Eine <i>Kompensation</i> liegt vor, wenn in einer Entität dasselbe hinzugefügt und weggenommen wird; sie ist ausdrücklich, wenn die Konstitution ausdrücklich ist. Um eine

es nicht weiter dargestellt wird, und indem man für M–M "nichts" setzt.	daß man ihn nicht weiter ausdrückt und statt M–M "Nichts" gesetzt wird.	<i>Annihilation</i> handelt es sich, wenn eine Entität aufgrund einer Kompensation verschwindet und nicht weiter ausgedrückt wird, wie wenn man für M–M <i>Nichts</i> setzt.
---	---	--

Abgesehen von den Ungereimtheiten spez. bei Def. 7 ist hier eine Tendenz zu monieren, die das wahre Verständnis der Leibnizschen Ausführungen wirklich nicht fördert, nämlich die einengende Deutung der Entitäten A und B als *Begriffe*. Herring führt das Wort ‘Begriff’ nicht nur in den obigen Def. 6 und 8, sondern noch an vielen Stellen des Fragments ein, ohne daß im Original von ‘notio’ die Rede wäre. Auch bei Schmidt findet sich wiederholt eine eigenmächtige Ergänzung des Wortes ‘Begriff’, die nur gelegentlich, aber nicht immer mit Hilfe von eckigen Klammern als interpretierende Einfügung des Übersetzers gekennzeichnet wird. Nun hatte Leibniz im Rahmen des "Plus-Kalküls" zwar ausdrücklich gesagt, daß die Terme A, B, ... *auch* für Begriffe stehen können, doch dies ist keineswegs die einzige zulässige Deutung des zugrundeliegenden Gegenstandsbereichs. Bei den meisten Beispielen in den Fragmenten # 177, 178 stehen die Terme vielmehr für *Mengen*, z.B. für Punktmengen (als Teile von Geraden). Darauf wird weiter unten noch näher eingegangen. Im Moment sei nur betont, daß eine ontologisch neutralere Redeweise von ‘Dingen’ oder ‘Entitäten’ dem Original auch vom Sprachlichen her wesentlich besser entspricht als das Reden von ‘Begriffen’.

Im Englischen kann man die "Dinge", auf die sich der Plus-Minus-Kalkül beziehen soll, in ziemlich natürlicher Weise als ‘thing’, ‘something’, etc. bezeichnen. Die in den folgenden Übersetzungen von Lewis bzw. Parkinson bevorzugte Redeweise von ‘terms’ ist jedoch auch vertretbar, wenngleich Terme eigentlich die Bezeichnungen, d.h. die sprachlichen Symbole für die jeweiligen "Dinge" darstellen.

Lewis (1918), S. 292-3	Parkinson (1966), S. 124	Eigener Vorschlag
<i>Def. 6.</i> If some term is supposed to coincide with a plurality of terms which are added or subtracted, then the plurality of terms are called the <i>constituents</i> , and the one term is called the thing constituted.	<i>Definition 6.</i> If some term is assumed to coincide with several which are added or subtracted at the same time, those several terms are called ‘constituents’, and the one term, ‘that which is constituted’.	<i>Definition 6.</i> If something is taken to coincide with several things which are added or subtracted, those several things are called the <i>constituents</i> , and the one thing that which is <i>constituted</i> .
<i>Scholium.</i> Thus all terms which are in anything are constituents, but the	<i>Note.</i> Hence all inexistents are constituents, but not conversely: thus,	<i>Note.</i> Hence all contained things are constituents, but not conversely; e.g.,

reverse does not hold; for example, $L-A = N$, in which case L is not in A .	$L-A = N$, though L is not in A .	if $L-A = N$, where L [and also A] is not contained in N .
<i>Def. 7.</i> Constitution (that is, addition or subtraction) is either tacit or expressed, N or $-M$ the tacit constitution of M itself, as A or $-A$ in which N is. The expressed constitution of N is obvious.	<i>Definition 7.</i> Constitution (that is, addition or subtraction) is either tacit or express. N or $-M$ is the tacit constitution of M , just as A or $-A$ in which N is. The express constitution of N itself is evident.	<i>Definition 7.</i> Constitution (that is, addition or subtraction) is either implicit or explicit. An <i>explicit</i> constitution of M is evident, e.g. by M or $-M$; an <i>implicit</i> constitution of M by A or $-A$, provided that M is in A .
<i>Def. 8.</i> Compensation is the operation of adding and subtracting the same thing in the same expression, both the addition and the subtraction being expressed [as $A+M-M$]. Destruction is the operation of dropping something on account of compensation, so that it is no longer expressed, and for $M-M$ putting Nothing.	<i>Definition 8.</i> 'Compensation' is when the same term is added and subtracted in the same term, both the addition and the subtraction being express. 'Destruction' is when some term is thrown out on account of compensation, so that it is not expressed any further, and in place of $M-M$ 'Nothing' is put.	<i>Definition 8.</i> A <i>compensation</i> obtains when the same thing is added and subtracted in one entity; it is explicit if the constitution is explicit. A <i>destruction</i> obtains when something disappears on account of a compensation, so that it is not expressed any further, e.g. in place of $M-M$ [0 or] 'Nothing' is put.

Die Hauptprobleme der Übersetzungen durch Lewis und Parkinson sind wiederum in der von Gerhardt verhunzten Definition 7 verankert. Dabei gesteht wenigstens Lewis (1918: 293; fn. 8) selbstkritisch zu, daß sein Definitionsversuch zu keinem verständlichen Resultat führte: "This translation is literal: the meaning is obscure". Gewisse andere Unklarheiten gehen hingegen auf sein eigenes Konto. So wird z.B. innerhalb von Def. 8 die Grundbestimmung "*Compensatio* est, cum idem ponitur et detrahitur in eodem" zunächst durch "Compensation is the operation of adding and subtracting the same thing in the same expression" einigermaßen korrekt übersetzt. Die anschließende Erläuterung "expressa cum expressa" interpretierte Lewis jedoch recht willkürlich als "both the addition and the subtraction being expressed [as $A+M-M$]"; Parkinson's "both the addition and the subtraction being express" ist auch nicht viel besser.

4 Der Plus-Kalkül

In den folgenden zwei Abschnitten soll eine Interpretation bzw. Rekonstruktion des Plus-Minus-Kalküls entwickelt werden, die auf den authentischen Ausführungen von Leibniz beruht, wie sie durch die Akademieausgabe in vortrefflicher Weise bereit gestellt werden. Dabei wird sich zeigen, daß die Leibnizschen Überlegungen zu den logischen Gesetzen der Minus-Operation zusammengenommen zwar inkonsistent sind, daß diese Inkonsistenzen jedoch verschwinden, wenn man die verschiedenen Konzeptionen der Minus-Operation auseinanderhält und in ihren logischen Prinzipien separat untersucht. Um dem Leser die hiermit zusammenhängenden Probleme verständlich zu machen, ist es jedoch erforderlich, zunächst die unkontroversen Elemente des Plus-Kalküls zu schildern, die Leibniz im ersten Teil des Fragments # 178 sowie – ein wenig ausführlicher und sorgfältiger – in # 177 entwickelt. Dieser Kalkül läßt sich als logische Theorie dreier Operatoren auffassen, nämlich

- der Identität bzw. Gleichheit $A = B$ (inklusive des Gegenbegriffs der Verschiedenheit, $A \neq B$)
- der Plus-Operation oder Addition $A+B$; sowie
- der Enthaltens-Beziehung $A \subseteq B$.

Die "Definition" bzw. das Grundgesetz der Gleichheit – das heute so genannte Leibniz-Gesetz der Identität – lautet: "Earum sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate" (A VI, 4, 846). In moderner Symbolik wäre es z.B. durch die folgende Deduktionsregel wiederzugeben, die es unter der Voraussetzung $A=B$ gestattet, von einer beliebigen Aussage $\alpha [A]$, die den Term A enthält, zu der entsprechenden Aussage $\alpha [B]$ überzugehen, in der der Term A an einer oder mehreren Stellen durch den Term B substituiert wurde:

IDEN 1 $A = B \mid \neg \alpha [A] \rightarrow \alpha [B]$.

Zwei weitere einfache, von Leibniz erwähnte Gesetze der Identität sind das Symmetrieprinzip "PROP. 1. Si A sit ∞B , etiam B erit ∞A ", bzw. das Transitivitätsprinzip "PROP. 3. Si $A \infty B$ et $B \infty C$, erit $A \infty C$ " (A VI, 4, 831), formal:

IDEN 2 $A=B \rightarrow B=A$

IDEN 3 $A=B \wedge B=C \rightarrow A=C$.

Bei dieser und den folgenden Formalisierungen benutzen wir die satzlogischen Operatoren $\wedge$ für die Konjunktion, $\vee$ für die Disjunktion, $\neg$ für die Negation, $\rightarrow$ für die Implikation und $\leftrightarrow$ für die Äquivalenz, wobei die letzteren wahlweise als *materiale* oder als *strikte* Implikation bzw. Äquivalenz verstanden werden können.

Aus IDEN 2 und IDEN 3 folgen per Kontraposition übrigens entsprechende Prinzipien für die Ungleichheitsrelation: "PROP. 2. Si A non ∞B , etiam erit B non ∞A ", bzw. "PROP. 4. Si $A \infty B$ et B non ∞C , erit A non ∞C " (A VI, 4, 831, 832), formal:

IDEN 4 $A \neq B \rightarrow B \neq A$

IDEN 5 $A=B \wedge B \neq C \rightarrow A \neq C$.

Der nächste, für den Plus-Kalkül zentrale Operator ist die "Addition", $A+B$, die sich nach Leibniz durch zwei Gesetze auszeichnet, nämlich durch *Symmetrie* – "AXIOMA 1. $B+N \infty N+B$ seu transpositio hic nihil mutat" und durch *Idempotenz*: "AXIOMA 2. $A+A \infty A$. Si nihil novi additur, nec novi aliquid fit, seu repetitio hic nil mutat" (A VI, 4, 833, 834); formal:

PLUS 1 $A+B = B+A$

PLUS 2 $A+A = A$.

Mit Hilfe der Addition läßt sich als nächstes die Inklusionsbeziehung wie folgt einführen: "Si plura simul sumta coincidant uni; plurium quodlibet dicitur inesse vel *contineri* in uno isto, ipsum autem Unum dicitur *continens* [...]. $A+B \infty L$ significat A inesse ipsi L , vel contineri a $[L]$ " (A VI, 4, 846-7). Benutzt man für die Inklusionsbeziehung das heute übliche Symbol $\subseteq$, und beachtet man, daß der Term B innerhalb der Gleichung $A+B = L$ wie eine Variable fungiert, die (implizit) durch einen Existenzquantor abgebunden wird, so läßt sich diese Definition wie folgt formalisieren:

INKL 1 $A \subseteq B \leftrightarrow \exists Y (A+Y = B)$.

Andererseits könnte diese Definition, wie Leibniz selber erkannte, auch folgendermaßen vereinfacht werden:

INKL 2 $A \subseteq B \leftrightarrow A+B = B$.

Denn zum einen folgt aus $A+B = B$ quantorenlogisch unmittelbar die Existenz eines Y (nämlich B) mit $A+Y = B$; und gilt umgekehrt für ein gewisses Y $A+Y = B$, so ist wegen PLUS 2 $(A+A)+Y = B$, also unter Voraussetzung der Assoziativität der Plus-Operation:

PLUS 3 $A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+(A+Y) = B$, woraus mit der ursprünglichen Gleichung $A+Y = B$ nach dem grundlegenden Substitutionsprinzip IDEN 1 folgt, daß $A+B = B$.

Dieser Leibnizsche Beweisgedanke findet sich in einem anderen Fragment, auf das hier nicht näher eingegangen werden soll. Im Rahmen des Plus-Minus-Kalküls hat Leibniz jedenfalls die Geltung von INKL 2 durch "PROP. 13. Si $L+B \infty L$, erit B in L " bzw. umgekehrt "PROP. 14 Si B est in L , erit $L+B \infty L$ " (A VI, 4, 837) klar zum Ausdruck gebracht.

Die gemäß INKL 1 oder INKL 2 definierte Relation ist reflexiv und transitiv, d.h. es gilt: "PROP. 7: A est in A ; Unumquodque est in se ipso" bzw. "PROP. 15. Si A est in B et B est in C , etiam A est in C " (A VI, 4, 835, 838); formal:

INKL 3 $A \subseteq A$

INKL 4 $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

Außerdem gilt trivialerweise "PROP. 8. A est in B , si $A \infty B$. Coincidentium unum est in altero" (A VI, 4, 835); formal:

INKL 5a $A=B \rightarrow A \subseteq B$

INKL 5b $A=B \rightarrow B \subseteq A$.

Weniger trivial hingegen ist die Umkehrung "PROP. 17: Si A est in B et B est in A , erit $A \infty B$. Quae se mutuo continent coincidunt" (A VI, 4, 839); also formal:

IDEN 6 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A=B$.

Dieses Gesetz würde es (im Verbund mit INKL 5) gestatten, den Plus-Kalkül alternativ so aufzubauen, daß nur $+$ und $\subseteq$ als primitive Operatoren gewählt und die Identität per $A=B : \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ definiert wird. Beim Leibnizschen Vorgehen in # 177 (und entsprechend auch in # 178) ist stattdessen $=$ ein primitiver Operator neben $+$ und die Inklusion gemäß $A \subseteq B : \leftrightarrow (A+B) = B$ definiert.

Zur Abrundung seien noch ein paar weitere Theoreme des Plus-Kalküls genannt, die das Zusammenspiel von Inklusion und Addition betreffen.

"PROP. 12. Si B est in L , erit $A+B$ in $A+L$ "; "PROP. 18. Si A est in L et B est in L , etiam $A+B$ erit in L "; bzw. verallgemeinert "PROP. 20. Si A est in

M et B est in N , erit $A+B$ in $M+N$ " (A VI, 4, 837, 840); formal:

PLUS 4 $A \subseteq B \rightarrow (A+C) \subseteq (B+C)$

PLUS 5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \rightarrow (A+B) \subseteq C$

PLUS 6 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \rightarrow (A+B) \subseteq (C+D)$.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch Leibnizens Erkenntnis, daß man die Implikation PLUS 4 nicht umkehren darf. Darauf wird im Zusammenhang mit der Minus-Operation noch näher einzugehen sein. Interessant ist ferner das folgende Theorem, das Leibniz zwar nicht in den ausgearbeiteten Entwurf # 177 aufnahm, sondern nur in einem anderem (früheren?) Fragment wie folgt formuliert hatte:

"43) Si L est in $A+B$ et L non est in A , nec in B , poterit assumi $L \infty M+N$, sic ut sit M in A et N in B . Vel familiari sermone, si quid sit in constituto, nec sit in uno constituentium, erit partim in uno partim in alio" (A VI, 4, 823).

Leibniz argumentiert für die Geltung dieses Gesetzes durch eine Plausibilitätsbetrachtung, von der er selbstkritisch anmerkt, daß ihr der Charakter eines strengen Beweis abgeht. Interessant ist aber jedenfalls Leibnizens (implizite) Verwendung von Begriffsvariablen (in der Funktion von Existenzquantoren), wie sie in der folgenden Formalisierung des Theorems sichtbar wird:

PLUS 7 $C \subseteq (A+B) \wedge \neg C \subseteq A \wedge \neg C \subseteq B \rightarrow \exists XY (C=(X+Y) \wedge X \subseteq A \wedge Y \subseteq B)$.

Ganz am Schluß des Fragments # 177 findet sich eine weitere Passage, deren genauere Explikation die Verwendung von Quantoren erforderlich macht. Im Rahmen von "PROP. 24" hatte sich Leibniz mit dem "Problem" beschäftigt, eine Menge von paarweise verschiedenen Termen bzw. Entitäten $A, B, C, \dots$ zu finden, die so beschaffen ist, daß durch additive Verknüpfung aus ihnen kein neuer Term (bzw. keine neue Entität) entsteht. Im Scholium diskutiert er u.a. die folgende Lösung:

"Generaliter sit *Maevius A, Titius B; Par hominum ex utroque compositum C*, erit *Maevius una cum hoc pari*, idem quod *Titius cum hoc pari*, utrobique enim nihil aliud prodit quam ipsum *par*" (A VI, 4, 845).

D.h. ausgehend von zwei Einzeldingen A und B (z.B. den Menschen *Maevius* und *Titius*) betrachte man die drei Entitäten: $\{A\}$, $\{B\}$ und das Paar $C=\{A,B\}$, für die dann $\{A\}+\{A,B\} = \{B\}+\{A,B\} = \{A,B\}$ ist. Durch "Addition" irgendwelcher Entitäten A, B, C kann man also keine weiteren Entitäten erzeugen. Im Anschluß an dieses, aus heutiger Sicht ziemlich triviale "Problem" bemerkt Leibniz:

"Alia adhuc solutio dari potest, quae est elegantior, sed specialior, si A et B habeant aliquod commune, idque datum sit, adeoque datum sit etiam quod utrique est proprium, sit igitur ipsi A proprium M , et ipsi B proprium N , et fiat $M+N \infty D$, commune autem utrique sit P . Dico $A+D$ fore $\infty B+D$. Cum enim sit $A \infty P+M$ et $B \infty P+N$ erit $A+D \infty P+M+N$, et $B+D$ etiam $\infty P+M+N$ " (*ibid.*).

Das Interessante an dieser "Lösung" des "Problems" besteht darin, daß Leibniz beiläufig *drei weitere logische Operatoren* erwähnt, die den bisherigen Rahmen des Plus-Kalkül sprengen und deshalb erst später diskutiert werden sollen: Erstens die Relation, die zwischen A und B genau dann besteht, wenn sie etwas gemeinsam enthalten ("habeant aliquod commune"). Diese Relation der Kommunikanz wäre im Rahmen des Plus-Kalküls unter Zuhilfenahme quantorenlogischer Konzepte in erster Annäherung wie folgt zu definieren:

$K(A,B) :\leftrightarrow \exists X (X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$.

Ferner spielt Leibniz im obigen Zitat auf den Operator des "Kommune" zweier Terme A und B an, der sozusagen das "größte" Element bezeichnet, das sowohl in A als auch in B enthalten ist:

$$A \bullet B := \iota X \forall Y (Y \subseteq A \wedge Y \subseteq B \rightarrow Y \subseteq X).$$

Drittens spricht Leibniz von dem "Proprium" eines Terms bzw. einer Entität A (relativ zu B), womit derjenige Teil von A gemeint ist, der, wenn A und B kommunikant sind, nicht in B enthalten ist. Dieses Proprium könnte man im Rahmen des Plus-Kalküls quantorenlogisch durch

$$(A \setminus B) := \iota X \forall Y (Y \subseteq A \wedge \neg Y \subseteq B \rightarrow Y \subseteq X)$$

definieren. Bevor wir diese Operatoren des Plus-Minus-Kalküls weiter untersuchen, soll jedoch zunächst eine semantische Interpretation des bislang nur syntaktisch charakterisierten Plus-Kalküls geliefert werden.

Im Scholium zu den Axiomen 1 und 2 des Kalküalentwurfs # 177 erläutert Leibniz, daß der Plus-Kalkül überall angewendet werden dürfe, wo es weder auf die "Ordnung" noch auf die "Wiederholung" ankommt, d.h. der Kalkül bezieht sich auf alle Entitäten, die das Kommutativitätsgesetz, $A+B = B+A$, und das Idempotenzgesetz, $A+A = A$, erfüllen. Als Beispiele solcher Entitäten nennt er zum einen "absolute Begriffe", zum anderen "wohlbestimmte Einzeldinge". Ähnlich heißt es in dem Fragment # 179, einer Vorstudie zu # 178:

"In hoc calculo literae A, B etc. significant certa quaedam irrepetibilia, verbi gratia res singulares, item notiones universales, unde repetitio est inutilis; item ordinis quoque hic non habetur ratio." (A VI, 4, 857)

Der Kalkül soll also grundsätzlich für "unwiederholbare" Entitäten A, B gelten, bei denen eine Wiederholung in der Gestalt von $A+A$ "unnötig" ist, d.h. dasselbe bezeichnet wie A, bzw. bei denen es auf die Ordnung in dem Sinne nicht ankommt, daß $A+B$ dasselbe ist wie $B+A$. Betrachten wir zunächst die Anwendung auf "res singulares". Um zu verdeutlichen, daß im Bereich konkreter Einzeldinge eine "Wiederholung überflüssig" ist, bringt er das oft zitierte Beispiel von drei Eiern:

"Realis enim adjectio ejusdem frustra repetitur. Cum bina et bina dicuntur facere quaterna, posteriora debent esse diversa a prioribus. Si <n> idem isset nihil novi prodiret, et perinde esset ac si joco ex tribus ovis vellemus facere sex, numerando primum 3 ova, deinde uno sublato residua 2, ac denique uno rursus sublato residuum 1" (A VI, 4, 834).

Drei *bestimmte* Eier ergeben also – zu sich selber "addiert" – nicht sechs Eier, sondern bleiben selbstverständlich drei, während im Bereich der Zahlen bzw. der Größen $3+3 = 6$ ist. Dieses Beispiel illustriert nun nicht nur den von Leibniz an dieser Stelle betonten Unterschied zwischen der "realen" Addition von "Gegenständen" und der arithmetischen Addition von Größen bzw. von Zahlen, sondern es macht zugleich deutlich, daß die "reale Addition" der "res singulares" genauer als eine Addition bzw. Vereinigung von *Mengen* von Einzeldingen zu verstehen ist. Die Einzeldinge selber können dabei einem beliebigen Gegenstandsbereich entnommen sein: Außer Eiern, Münzen und Menschen kommen in Leibnizens Illustrationen vor allem geometrische Entitäten, z.B. gerade Strecken (als Mengen von Punkten) vor.

Wenn deshalb bei der ersten zulässigen Anwendung die Terme A, B, C ... präziser für irgendwelche Mengen von Dingen stehen, ergibt sich die folgende – wohl auch von Leibniz so intendierte – Interpretation der Operatoren des Plus-Kalküls:

Original	Symbolisierung	Moderne Interpretation

A coincidit ipsi B; $A \infty B$	$A=B$	$A=B$, d.h. $\Lambda x(x \in A \equiv x \in B)$
A inest ipsi B; B continet A	$A \subseteq B$	$A \subseteq B$, d.h. $\Lambda x(x \in A \supset x \in B)$
$A?B$; $A+B$; AB	$A+B$	$A \cup B$, d.h. $\{x: x \in A \vee x \in B\}$

Betrachten wir zweitens die etwas weniger evidente Anwendung des Plus-Kalküls, bei der die Terme A, B, C ... für universale bzw. "absolute" *Begriffe* wie z.B. 'Mensch', 'Lebewesen', 'rational', etc. stehen. Eine solche sog. "intensionale" Betrachtungsweise liegt der überwiegenden Mehrzahl der übrigen Kalküalentwürfe von Leibniz zugrunde. Nun hat ganz generell jeder Begriff A sowohl eine Extension als auch eine Intension, und man kann von der Betrachtung des einen äquivalent zur Betrachtung des anderen übergehen. So erläutert Leibniz z.B. in einem Kalküalentwurf aus dem Jahre 1690:

"Scilicet quando dico *Omnis homo est animal*, hoc ipsum volo, homines inter animalia esse quaerendos, seu qui non sit animal nec hominem esse.

Rursus quando dico *omnis homo est animal*, volo notionem animalis contineri in idea hominis. Et contraria est methodus per notiones et per individua, scilicet: Si omnes homines sunt pars omnium animalium, sive si omnes homines sunt in omnibus animalibus, vicissim animalis notio erit in notione hominis; Et si plura sunt animalia extra homines, addendum est aliquid ad ideam animalis, ut fiat idea hominis. Nempe augendo conditiones, minuitur numerus" (C, 235).

Kürzt man die Extension eines Begriffs A durch A_E ab, so läßt sich Leibnizens Beispiel mit den Begriffen M = 'Mensch' und L = 'Lebewesen' wie folgt formalisieren: $M_E \subseteq L_E$, d.h. die Extension bzw. der Umfang des Begriffs 'Mensch' ist im Umfang des Begriffs 'Lebewesen' enthalten. Dabei ist unter dem Umfang eines Begriffs – wie auch heute üblich – die Menge der Individuen zu verstehen, die unter diesen Begriff fallen. Deshalb besagt $M_E \subseteq L_E$, daß die Menge aller Menschen in der Menge aller Lebewesen enthalten ist. Dies kann man angesichts des Prinzip INKL 1 auch so paraphrasieren: $\exists Y(M_E + Y = L_E)$, d.h. innerhalb der Menge aller Lebewesen gibt es neben der Menge der Menschen noch (mindestens) eine weitere Menge Y (z.B. die Menge der nicht-vernunftbegabten Lebewesen).

Bildet man nun zu den Begriffen A und B den konjunktiven Begriff AB bzw. $A+B$, so entsteht eine auf den ersten Blick etwas verwirrende Situation. Denn bei extensionaler Betrachtungsweise stellt $A+B$ offenbar die mengentheoretische *Vereinigung* von A und B dar. Bei intensionaler Sichtweise wäre $A+B$ hingegen als ein Begriff zu deuten, dessen Umfang dem mengentheoretischen *Durchschnitt* der einzelnen Begriffsumfänge entspricht. Diesen scheinbaren Widerspruch könnte man formal so beschreiben, daß einerseits $A_E + B_E = A_E \cup B_E$ ist, andererseits jedoch $(A+B)_E = (AB)_E = A_E \cap B_E$. Auf diesem Hintergrund hat Dürr (1930: 41 ff.) dafür argumentiert, den Leibnizschen Plus-Kalkül als einen abstrakten Kalkül aufzufassen, der *wahlweise* die Deutung von $A+B$ als Vereinigung und als Durchschnitt gestattet. In der Tat könnte man den Operator + in *einigen* Theoremen des Plus-Kalküls durchaus (salva veritate) als Symbol für $\cap$ interpretieren. Doch dies ist nicht in allen Gesetzen möglich, insbesondere

nicht in dem zentralen Prinzip INKL 2, das den Zusammenhang zwischen Addition und Inklusion per $A \subseteq B \leftrightarrow A+B = B$ zum Ausdruck bringt. Bei einer Deutung von $+$ als $\cap$ wäre die letztere Gleichung, d.h. $A \cap B = B$, nämlich nicht mit $A \subseteq B$, sondern mit der *umgekehrten* Inklusion $B \subseteq A$ äquivalent!

Dem mathematischen Logiker Dürr ist dieses Faktum natürlich nicht verborgen geblieben, und er hat diese Schwierigkeit dadurch aus dem Wege zu räumen versucht, daß er vorschlug, die Formel ‚A inest ipsi B‘ *wahlweise* im Sinne von $A \subseteq B$ und im Sinne von $B \subseteq A$ zu interpretieren. Er glaubte, eine solche schwankende Auffassung des Ausdrucks ‚A inest ipsi B‘ sei durch Leibnizens Bemerkung gerechtfertigt, derzufolge "in gewisser Weise die Gattung in der Art und in gewisser Weise die Art in der Gattung enthalten ist". Demgegenüber ist jedoch festzuhalten, daß die von Dürr vorgeschlagene alternative Interpretation:

Original	Symbolisierung	Dürrs Interpretation
A coincidit ipsi B; $A \infty B$	$A=B$	$A=B$
A inest ipsi B; B continet A	$A \subseteq B$; $B \supseteq A$	$A \supseteq B$
$A?B$; $A+B$; AB	$A+B$	$A \cap B$

zwar ein logisch durchaus mögliches *Modell* des Plus-Minus-Kalküls darstellt. Aber eine solche Interpretation stimmt nicht mit Leibnizens *Intentionen* überein. Für Leibniz bedeutet die Formel ‚A inest ipsi B‘ *immer* – egal ob er in seinen Beispielen "extensionale" Mengen von Punkten oder "intensionale" Begriffe betrachtet –, daß die "kleinere" Entität A in der "größeren" Entität B enthalten ist. Kürzt man die Intension eines Begriffs A in Analogie zur Extension durch A_I ab, so läßt sich das weiter oben zitierte Gesetz der (umgekehrten) *Reziprozität* von Extension und Intension wie folgt formulieren:

REZI $A_{E \subseteq} B_E \leftrightarrow B_{I \subseteq} A_I.$

Die hinter diesem Prinzip stehende, für moderne Logiker etwas befremdliche Sichtweise setzt lediglich voraus, daß Intensionen selber als *Mengen* aufgefaßt werden, und zwar selbstverständlich nicht als Mengen von Individuen, sondern als Mengen von "Ideen", Eigenschaften oder *Attributen*. So enthält z.B. der Begriff des Menschen die Attribute ‚Lebewesen‘, ‚vernunftbegabt‘, etc. Deshalb ist die Intension bzw. die "Idee" des Begriffs ‚Lebewesen‘ in der "Idee" ‚Mensch‘ enthalten, bzw. ganz allgemein die "Idee" oder der Begriff der Gattung in der Idee oder dem Begriff der Art. Man kann also die Idee des Menschen dadurch erzeugen, indem man zur Idee des Lebewesens eine weitere Menge X von Attributen hinzufügt, d.h. es gilt $\exists X (L_I + X = M_I)$ und damit gemäß INKL 2 $L_I \subseteq M_I$. Insgesamt bleibt somit festzuhalten, daß – wie Leibniz im Scholium zu den Def. 3 – 6 von # 177 betont – die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ innerhalb des Plus-Kalküls sowohl auf "Extensionen", d.h. auf Mengen von Einzeldingen, als auch auf

"Intensionen" bzw. Begriffe, d.h. auf Mengen von Attributen angewendet werden darf. In beiden Fällen behält nicht nur die Relation der Inklusion, sondern auch die Operation der Addition ihren üblichen Sinn. Denn die Intension eines konjunktiven Begriffs $A+B$, d.h. $(AB)_I$ bzw. $(A+B)_I$, fällt mit $A_I \cup B_I$ zusammen. Deswegen stellt das eingangs aufgestellte Schema *die* (einzige, von Leibniz) *intendierte* Interpretation des Plus-Kalküls dar. Im folgenden Abschnitt bleibt zu untersuchen, in welcher Weise dieses Modell auch auf den umfassenderen Plus-Minus-Kalkül anwendbar ist.

5 Der Plus-Minus-Kalkül

Der Plus-Minus-Kalkül stellt eine Erweiterung des Plus-Kalküls um die folgenden Elemente dar:

- der Minus-Operator, $A-B$;
- die Relation der Kommunikanz zweier Terme A und B , $K(A,B)$;
- die Konstante des Nichts bzw. Nihil, 0 ;
- der Operator des Kommune von A und B , $A \bullet B$;
- der Operator des Propriums von A gegenüber B , $A \setminus B$.

Die genaue Interpretation dieser logischen Operatoren bereitet eine Reihe von Schwierigkeiten, die vor allem daher rühren, daß Leibniz in den verschiedenen Kalküalentwürfen miteinander unverträgliche Gesetze für die Minus-Operation ins Auge gefaßt hat. Bevor wir diese Schwierigkeiten im Detail analysieren, müssen die relativ unkontroversen "Hilfskonzepte" des Nihil und der Kommunikanz näher untersucht werden.

5.1 Das Nichts

Die Leibnizsche Konzeption des Nichts (lat. Nihil) hat sowohl philosophische als auch mathematische Wurzeln. Auch wenn die moderne Wissenschaftstheorie mit Recht davor warnt, den Quantorausdruck 'nichts' durch Substantivierung einfach in das Nomen 'Nichts' zu überführen, so war es jedenfalls im 17. Jahrhundert durchaus gang und gäbe, von einem Etwas namens 'Nichts' zu sprechen. Dieses Nihil (bzw. Non-Ens) wurde im scholastischen Jargon als eine Entität charakterisiert, die keinerlei Eigenschaften hat: "Nihili nulla sunt attributa". Leibniz hat in zahlreichen Fragmenten versucht, diesen Gedanken im Rahmen seiner Begriffslogik wie folgt zu formalisieren:

"Si N non est A , et N non est B , et N non est C , et ita porro; N dicetur esse Nihil."

Bei dieser "Definition" könnte man das 'usw.' mit Hilfe eines Allquantors per $\forall Y(N \text{ non est } Y)$ präzisieren. Ferner ist in Leibnizens logischen Schriften die Formel ' $A \text{ est } B$ ' (bzw. synonym ' $A \text{ continet } B$ ') immer äquivalent mit ' $B \text{ inest ipsi } A$ '. Deshalb würde die "Definition" des Nichts im Rahmen des Plus-Minus-Kalkül folgende Gestalt annehmen: $\forall Y(\neg Y \subseteq N)$, d.h. das Nichts ist etwas, das selber nichts enthält.

Nun läßt sich zwar das Nichts – bzw. in moderner Terminologie: die leere Menge – durchaus als eine Entität auffassen, die *im Sinne der $\in$ -Relation* nichts enthält: $\forall Y(\neg Y \in N)$; trotzdem gibt es stets eine Entität Y , die *im Sinne der Inklusionsbeziehung* in N enthalten ist, nämlich $Y=N$ selber! Im

Rahmen des Plus-Minus-Kalküls gewinnt man ja aus dem Gesetz INKL 3 unmittelbar $N \subseteq N$, woraus a fortiori $\exists Y(Y \subseteq N)$ folgt. Zur Lösung dieses Problems könnte man versuchen, den Quantor $\forall Y$ bei der "metaphysischen Definition" des Nichts auf den Bereich von Entitäten bzw. Termen einschränkt, die selber etwas "Positives" darstellen bzw. bezeichnen. In diesem Sinne erläutert Leibniz in den "Definitiones Notionum Metaphysicarum atque Logicarum":

"*Nihil* est cui non competit nisi terminus mere negativus, nempe si *N* non est *A*, nec est *B*, nec *C*, nec *D*, et ita porro, tunc *N* dicitur esse *Nihil*" (A VI, 4, 625).

Eine Präzisierung dieses Gedankens würde jedoch eine vorhergehende Klassifikation aller Terme bzw. Entitäten in "positive" einerseits und "negative" oder "privative" andererseits voraussetzen, die nicht nur im Rahmen des Plus-Minus-Kalküls nicht zur Verfügung steht, sondern die auch aus systematischen Gründen nur schwer realisiert werden könnte. In den wichtigen "Generales Inquisitiones" von 1686 versuchte Leibniz, die Abgrenzung der negativen von den positiven Termen mit Hilfe des dort entwickelten Negationsoperators wie folgt zu definieren:

"*Privativum non-A*.

Non-non-A idem est quod *A*.

Positivum est *A*, si scilicet non sit *non-Y* quodcunque, posito *Y* similiter non esse *non-Z* et ita porro. [...]

Positivum idem est quod *Ens*.

Non Ens est quod est mere privativum, seu omnium privativum, sive *non-Y*, hoc est *non-A*, *non-B*, *non-C*, etc. Idque est quod vulgo dicunt nihili nullas esse proprietates" (A VI, 4, 740).

Negative Terme sollen sich also von positiven Termen dadurch unterscheiden, daß sie die Gestalt Non-A besitzen, während dies für positive gerade nicht gilt. Doch angesichts des Gesetzes der doppelten Verneinung läßt sich jeder positive Term *A* äquivalent in Non-Non-A und damit (für *Y* = Non-A) in die Gestalt Non-Y umformen. Deshalb werden die obigen Explikationen zirkulär. Daß *A* positiv ist, läßt sich nur dann durch die Forderung erfassen, daß *A* nicht die Gestalt Non-Y hat, wenn man voraussetzt, daß *Y* selber nicht ebenfalls die Gestalt Non-Z besitzt, d.h. nicht negativ, sondern positiv ist.

Ein alternativer Ansatz zur "metaphysischen Definition" des Nichts, die ohne die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Termen auskommt, würde darin bestehen, daß man das Nichts als jenen Term charakterisiert, der keinen *anderen* Term – außer sich selber – enthält. Eine Formalisierung dieses Gedankens qua $N := \iota X \forall Y(Y \subseteq X \rightarrow Y = N)$ wäre allerdings ebenfalls zirkulär und deshalb als Definition unbrauchbar. Allenfalls könnte man definieren: $N = \iota X \forall Y(Y \subseteq X \rightarrow Y = X)$. Daß es überhaupt eine (und nur eine) Entität *X* gibt, die diese Bedingung erfüllt, ist jedoch aus den bisherigen Gesetzen des Plus-Minus-Kalküls keineswegs ableitbar.

Deshalb wollen wir zu den konkurrierenden "mathematischen" Ansätzen übergehen, bei denen das Nichts in Analogie zur Zahl 0 konzipiert wird, die Leibniz selber gelegentlich durch das Wort 'Nihil' bezeichnet. Die Besonderheit der Zahl 0 drückt sich zum einen in der Gleichung " $a-a = 0$ " aus, wie sie z.B. in dem noch unveröffentlichten Manuskript "Fundamenta Calculi Literalis pro Algorithmo Quatuor Specierum et Regulae Aureae" (LH XXXV, 12, 2, 72-73) als # (9) einer Liste von "Axiomata in quibus continetur vis characterum" auftaucht. An anderer Stelle – aber immer noch

in einem klar mathematischen Kontext – heißt es weniger formal: "Differentia aequalium est Nihil" (A VI, 4, 419). Diese Eigenschaft des "Nichts" läßt sich direkt vom Bereich der Zahlen auf den Bereich der Mengen übertragen, indem man als 2. Axiom des Plus-Minus-Kalküls postuliert:

"Si idem ponitur et detrahitur, quicquid inde in alio constituitur, coincidit *Nihilo*. Seu $A [...] - A [...] \infty Nih.$ " (A VI, 4, 848).

Da aber die Deutung der Minus-Operation das Hauptproblem bei der Interpretation des Plus-Minus-Kalküls darstellt, wollen wir diese Operation nicht bereits bei der Definition des Nichts voraussetzen, sondern 0 lieber alternativ definieren. In direkter Analogie zum elementaren zahlentheoretischen Gesetz " $a+0 = a$ " (LH XXXV, 12, 2, 72; # 5) gilt nämlich für beliebige A: "28) Nihilum sive ponatur sive non, nihil refert, seu $A+Nih. \infty A$ " (A VI, 4, 819). Der "leere" Term 0 darf also jedem Term A hinzugefügt werden kann, ohne diesen zu verändern, d.h. es gilt:

NIH 1 $A+0 = A.$

Angesichts des grundlegenden Prinzips INKL 2 läßt sich diese charakteristische Eigenschaft auch so paraphrasieren, daß der "leere" Term 0 in jedem beliebigen Term A enthalten ist:

NIH 2 $0 \subseteq A.$

Durch diese miteinander äquivalenten Prinzipien wird das Nichts eindeutig als die *leere Menge* charakterisiert, so daß das obige Schema der intendierten Interpretation des Plus-Minus-Kalküls um folgende Spalte zu ergänzen ist:

Original	Symbolisierung	Moderne Interpretation
Nihil	0	$\emptyset$, d.h. $\{x: x \neq x\}$

Allerdings handelt es sich bei NIH 1 bzw. NIH 2 nicht um *explizite* Definitionen. Mit Hilfe von Begriffsquantoren könnte man jedoch setzen $0 := \iota X \forall Y (Y+X = Y)$ bzw. $0 = \iota X \forall Y (X \subseteq Y)$. Streng genommen müßte man bei einer solchen Definition vorab die Existenz und die Eindeutigkeit eines solchen X sicherstellen. Zumindest in puncto Eindeutigkeit findet man hierzu einen bescheidenen Ansatz im "Specimen Calculi Coincidentium", wo Leibniz die beiden Sätze formuliert: "20) Si A est Nihil et B est Nihil, erit $A \infty B$, seu duo Nihila coincidunt. 21) Si A est Nihil et B est Nihil, erit $A+B \infty A [...]$, seu nihil additum nihilo facit Nihil" (A VI, 4, 817). Die letztere Aussage läßt sich natürlich im Sinne von

NIH 3 $0+0 = 0$

interpretieren und ist dann eine triviale Folge von NIH 1. Leibniz hat sie jedoch vermutlich in dem Sinne verstanden, daß wenn man zwei "verschiedene" leere Terme 0 und 0* ins Auge fassen würde, dann jedenfalls $0+0^* = 0$ bzw. $0+0^* = 0^*$ sein muß. Denn in der oben ausgelassenen Passage findet sich der Hinweis "per [20] et 11". Da es sich bei dem Gesetz 11 gerade um das Idempotenzprinzip der Addition, PLUS 2, handelt, ist Leibnizens Beweisgedanke wohl wie folgt zu rekonstruieren: Wegen § 20, d.h. wegen $0=0^*$, gilt die Gleichung $0+0^*=0+0$, woraus angesichts von PLUS 2, d.h. mit $0+0=0$, das behauptete $0+0^*=0$ folgt.

5.2 Kommunikanz

Im Hauptentwurf des Plus-Minus-Kalküls wird die Relation der Kommunikanz zweier Terme A, B wie folgt definiert:

"Si aliquid M insit ipsi A itemque insit ipsi B , dicetur ipsis commune, ipsa autem dicentur *communicantia*. Si vero nihil commune habeant [...] dicentur *incommunicantia*" (A VI, 4, 847).

Symbolisiert man diese Relation durch $K(A, B)$, so läßt sich Leibnizens Bestimmung mit Hilfe eines Existenzquantors folgendermaßen formalisieren: $K(A, B) \leftrightarrow \exists X (X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$. In einem anderen Fragment, dem "Specimen Calculi Coincidentium", findet sich für die konträre Relation der Inkommunikanz die alternative Definition:

"Si sit L in A , et M in B , atque inde sequitur L non ∞M , dicentur A et $[B]$ *incommunicantia*" (A VI, 4, 821).

Die Variablen L und M fungieren hierbei offensichtlich als Allquantoren, so daß man formal die Bestimmung $\neg K(A, B) \leftrightarrow \forall YZ (Y \subseteq A \wedge Z \subseteq B \rightarrow Y \neq Z)$ erhält. Beide Ansätze sind logisch äquivalent. Denn gilt $\neg K(A, B)$ im Sinne von $\neg \exists X (X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$, so kann man aus der Annahme $Y \subseteq A \wedge Z \subseteq B$ unmittelbar $Y \neq Z$ erschließen; folgt umgekehrt für beliebige Y, Z aus $Y \subseteq A \wedge Z \subseteq B$, daß Y von Z verschieden ist, so kann es kein X geben, welches sowohl in A als auch in B enthalten ist. Nun ist natürlich angesichts von NIH 3 der leere Term 0 in jedem A und jedem B enthalten. Deshalb müssen die Leibnizschen Definitionen der Kommunikanz bzw. Inkommunikanz wie folgt modifiziert werden:

KOMM 1 $K(A, B) : \leftrightarrow \exists X (X \neq 0 \wedge X \subseteq A \wedge X \subseteq B)$

KOMM 2 $\neg K(A, B) : \leftrightarrow \forall YZ (Y \subseteq A \wedge Z \subseteq B \wedge Y \neq 0 \wedge Z \neq 0 \rightarrow Y \neq Z)$.

Hierdurch ist die intendierte Interpretation der (In-)Kommunikanz zweier Terme (bzw. zweier Mengen) A, B eindeutig festgelegt:

Original	Symbolisierung	Moderne Interpretation
A et B habent aliquid commune	$K(A, B)$	$A \cap B \neq \emptyset$, d.h. $\forall x (x \in A \wedge x \in B)$
A et B sunt incommunicantia	$\neg K(A, B)$	$A \cap B = \emptyset$, d.h. $\neg \forall x (x \in A \wedge x \in B)$

Im folgenden betrachten wir noch eine Reihe von einschlägigen Theoremen, die Leibniz in den verschiedenen Entwürfen zum Plus-Minus-Kalkül aufgestellt hat. So findet sich im "Specimen Calculi Coincidentium" die Behauptung: "Si A et B incommunicantia et $A+B \infty C$, non erit $A \infty C$ ", die Leibniz folgendermaßen zu beweisen versucht: "Nam alioqui erit $A+B \infty A$. Ergo (per 15) erit B in A , contra Hypoth. aut B erit Nihil, quod etiam est contra Hypothesin" (A VI, 4, 821, # 39). Aus der Annahme $A = C$ ergäbe sich wegen $A+B = C$ zunächst $A+B = A$, also würde gemäß dem Prinzip

15 jenes Kalküls, d.h. gemäß INKL 2, $B \subseteq A$ gelten, was "gegen die Voraussetzung" des Theorems verstößt. In der Tat hätte man ja mit $B \subseteq A$ angesichts des trivialen $B \subseteq B$ die Existenz eines X mit $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$, und dies widerspricht der Voraussetzung $\neg K(A,B)$, sofern B selber von 0 verschieden ist!

Daß jedoch das Gegenteil der letzteren Annahme, d.h. $B = 0$, ebenfalls "contra Hypothesin", also der Voraussetzung des Theorems widersprechen würde, ist streng genommen falsch. Gemäß der oben erfolgten, notwendigen Modifikation der Relation $K(A,B)$ im Sinne von KOMM 1 oder KOMM 2 folgt ja aus der Annahme $B = 0$ automatisch, daß A mit B inkommunikant ist. Für eine konsistente Rekonstruktion des Plus-Minus-Kalküls muß das Leibnizsche Theorem jedenfalls wie folgt modifiziert werden: $\neg K(A,B) \wedge A+B = C \wedge B \neq 0 \rightarrow A \neq C$, bzw. vereinfacht:

KOMM 3 $\neg K(A,B) \wedge B \neq 0 \rightarrow A \neq A+B.$

Für die Leibnizsche Konzeption der (In-)Kommunikanz ist weiterhin die folgende, nicht sonderlich ausgearbeitete Marginalie zum vorherigen Theorem von Interesse:

"Si A et B nihil habent commune, itemque L et M , et A non sit ∞L , nec B erit M .

Si L et M habent aliquid commune et $A+B$ sit $\infty L+M$, poterit esse $A \infty L$, licet B non sit ∞M , ut si $A+B \infty A+B+A$, quod fiet si L sit A et M sit $A+B$.

Si A et B incommunicantia item L et M , et nullum horum coincidat ulli illorum, non potest simul utrumque utrique inesse, sed si A inest L , non erit B in M " (A VI, 4, 821).

Der zweite Absatz ist noch am klarsten: Aus $A+B = C+D$ und $B \neq D$ folgt nicht, daß $A \neq C$. Denn wenn C und D kommunikant sind, wie z.B. $C = A$ und $D = A+B$, so gilt natürlich $A+B = A+(A+B)$, d.h. es ist zwar $B \neq D$ aber trotzdem $A = C$. Da dieses Prinzip kein eigentliches Theorem, sondern eher ein Antitheorem darstellt, sei auf eine Formalisierung verzichtet. Auf dem gerade erläuterten Hintergrund wird jedenfalls plausibel, daß das im ersten Absatz äußerst elliptisch formulierte Prinzip sinngemäß wie folgt ergänzt werden muß: *Wenn $A+B = L+M$ ist, und wenn – wie Leibniz fortfährt – A und B bzw. L und M inkommunikant sind, dann gilt: wenn $A \neq L$, dann auch $B \neq M$; also formal:*

KOMM 4 $\neg K(A,B) \wedge \neg K(C,D) \wedge A+B = C+D \wedge A \neq C \rightarrow B \neq D.$

Per Kontraposition folgt hieraus:

KOMM 5a $\neg K(A,B) \wedge \neg K(C,D) \wedge A+B = C+D \wedge B = D \rightarrow A = C$

bzw. nach Umbenennung der Terme:

KOMM 5b $\neg K(A,B) \wedge \neg K(C,D) \wedge A+B = C+D \wedge A = C \rightarrow B = D.$

Dieses Gesetz formulierte Leibniz übrigens als "Theorema XII" im wesentlich reiferen und deshalb wahrscheinlich späteren Kalkülentwurf des "Non inelegans Specimen" wie folgt:

"In incommunicantibus quae coincidentibus addita faciunt coincidentia, ea ipsa sunt coincidentia. Seu sit $A+B \infty C+D$ et $A \infty C$ erit $B \infty D$, modo A et B itemque C et D sint incommunicantia" (A VI, 4, 854).

Hieraus gewinnt man mit dem Spezialfall $A = C$ das für die Deutung der Minus-Operation wichtige Korollar:

KOMM 6 $\neg K(A,B) \wedge \neg K(A,C) \wedge A+B = A+C \rightarrow B = C.$

Wenn man weiterhin im dritten Absatz der oben zitierten Marginalie analog die Voraussetzung $A+B = C+D$ ergänzt, erhält man das folgende, systematisch allerdings nicht besonders bedeutsame Theorem

$\neg K(A,B) \wedge \neg K(C,D) \wedge A+B = C+D \wedge A \neq C \wedge A \neq D \wedge B \neq C \wedge B \neq D \rightarrow \neg (A \subseteq C \wedge B \subseteq D).$

Abschließend betrachte man noch ein paar einschlägige Ausführungen aus dem "Non inelegans specimen", sofern sie nicht bereits ein Verständnis der Minus-Operation voraussetzen und deshalb erst im nächsten Abschnitt weiter diskutiert werden. Leibnizens Theorem XIII besagt:

"Generaliter *Si coincidentibus addendo alia fiant coincidentia, addita sunt inter se communicantia*. Sint coincidentia vel eadem A et A , fiatque $A+B \infty A+N$ dico B et N esse communicantia" (A VI, 4, 854).

Dieses formal durch:

KOMM 7 $A+B = A+C \rightarrow K(B,C)$

darzustellende Theorem wurde übrigens auch in dem kurzen Fragment "Plura similiter posita simul aequivalent uni" (A VI, 4, 859-60) – nur etwas komplizierter – wie folgt formuliert: "Si $A+B \infty L$ et $A+N \infty L$, B et N habent aliquid commune." In einem "Porisma" am Ende des Fragments # 177 faßt Leibniz dann seine in KOMM 6 und KOMM 7 erläuterte Theorie der Inkommunikanz durch die folgende Fallunterscheidung zusammen:

"In Notis: $A+B \infty A+N$. Si A et B incommunicantia, item A et N incommunicantia, erit $B \infty N$; si A et B communicantia, at A et N incommunicantia, N erit in B ; denique si B communicet cum A , et N itidem communicet cum A , tunc B et N ad minimum communicabunt inter se" (A VI, 4, 855).

Unter Voraussetzung von $A+B = A+C$ kann man also im Falle $\neg K(A,B) \wedge \neg K(A,C)$ gemäß KOMM 6 schließen, daß $B = C$ ist; gilt hingegen $K(A,B) \wedge K(A,C)$, so ergibt sich mit KOMM 7, daß $K(B,C)$. Ist hingegen nur einer der Terme B, C mit A inkommunikant, z.B. $\neg K(A,B) \wedge K(A,C)$, so läßt sich statt $B = C$ lediglich $B \subseteq C$ folgern. Dieses Gesetz gilt aber auch ohne explizite Voraussetzung von $K(A,C)$ in der Gestalt:

KOMM 8 $A+B = A+C \wedge \neg K(A,B) \rightarrow B \subseteq C.$

Denn im Unterfall $K(A,C)$ erhält man die Konklusion gemäß Leibnizens eigener Aussage, und im anderen Fall $\neg K(A,C)$ ergibt sich gemäß KOMM 6, daß $B = C$, also a fortiori auch $B \subseteq C$.

5.3 Die Minus-Operation

Bei der Suche nach den Gesetzen für die Addition und Subtraktion von (Mengen von) *Dingen* ließ Leibniz sich stark von der Theorie der Addition bzw. Subtraktion von *Zahlen* leiten. Diese Analogie wird besonders offenkundig, wenn man das "Non inelegans Specimen" mit den "Prima Calculi Magnitudinum Elementa" (GM 7, 77-82) vergleicht, wo Leibniz eine Grundlegung der mathematischen Gesetze der Addition und Subtraktion versucht. Es gilt lediglich, zwei Unterschiede zu beachten. Der erste besteht darin, daß im mathematischen Fall an die Stelle der *Identität* bzw. Koinzidenz die bloße *Gleichheit* von Größen tritt. Statt IDEN 1 hat man demzufolge das Prinzip: "*Aequalia sunt quorum unum alteri substitui potest*

salva magnitudine" (GM 7, 77). Mit Hilfe dieses Gesetzes werden die beiden Haupteigenschaften der Gleichheitsrelation, nämlich Reflexivität und Transitivität, von Leibniz in strikter Analogie zum Beweis von IDEN 2 und IDEN 3 innerhalb des "Non inelegans Specimen" bewiesen. Der zweite Unterschied wurde bereits oben betont: Im Falle der Addition "realer" Entitäten gilt das Idempotenzgesetz PLUS 2, welches für Zahlen selbstverständlich nicht zutrifft.

Die Leibnizsche Konzeption der elementaren arithmetischen Operatoren basiert teilweise auf einer Theorie der *Vorzeichen*, die sich wie folgt umreißen läßt. Sind a, b, c, ... Zahlausdrücke, so kann man aus ihnen durch Voranstellen der *einstelligen* Operatoren + bzw. – komplexe Zahlenterme +a, –b, etc. bilden. Für iterierte Terme gelten dann die bekannten Vorzeichenregeln

$$\text{ARITH 1.1} \quad -(-a) = +a$$

$$\text{ARITH 1.2} \quad +(-a) = -a$$

$$\text{ARITH 1.3} \quad -(+a) = -a$$

$$\text{ARITH 1.4} \quad +(+a) = +a.$$

Dabei darf ein vorangestelltes '+' per Konvention einfach weggelassen werden, so daß 'a' immer als '+a' zu verstehen ist. Mit Hilfe dieser Vorzeichenoperatoren sowie des weiteren Operators der *Juxtaposition*, welcher die Terme 's' und 't' zu dem Ausdruck 'st' verknüpft, läßt sich dann die "normale", *zweistellige* Addition bzw. Subtraktion als Abkürzung für (+a)(+b) bzw. (+a)(–b) auffassen:

"(7) *Definitio*. Si pluribus magnitudinibus simpliciter positis, ut a, b, ex hoc ipso fiat nova homogenea, ut m, operatio dicitur *Additio*, nova aequatio dicetur *summa* et repraesentatio erit talis $+a+b = +m$. Et + vel *plus* erit signum additionis, id est simplicis positionis.

[...]

(12) Ab a *subtrahere* b significat in magnitudine, in qua ponitur a, sumere aequalem ipsi b, eamque tollere, idque indicatur scribendo: $a-b$ vel $+a-b$ " (GM 7, 78).

Die Tatsache, daß der Minus-Operator das Gegenteil zum Plus-Operator darstellt, läßt sich dann einfach so ausdrücken: "Hinc si in magnitudine, in qua est a, nihil aliud esse intelligatur quam b, restat nihil, adeoque $+b-b = 0$ " (*ibid.*):

$$\text{ARITH 2} \quad a-a = 0.$$

Die Zahl 0 wird dadurch charakterisiert, daß es keinen Unterschied macht, ob man sie zu einer beliebigen Zahl a hinzufügt (bzw. von ihr abzieht) oder nicht: "(10) *Explicatio*. $+0+a = a$ seu 0 est signum *nihili*, quod nihil addit" (GM 7, 78) bzw. "(12) Nihil, 0, nec addit nec minuit" (GM 7, 83):

$$\text{ARITH 3.1} \quad a+0 = a$$

$$\text{ARITH 3.2} \quad a-0 = a.$$

Da die Verknüpfung durch Juxtaposition aufgrund ihrer "Natur" als kommutativ angenommen werden darf, gilt für beliebige Terme s und t: (st) = (ts). Daraus folgt einerseits die Kommutativität der Addition:

$$\text{ARITH 4} \quad a+b = b+a$$

sowie andererseits die "Transponierbarkeit" der Subtraktion im Sinne von

$$\text{ARITH 5.1} \quad a-b = -b+a$$

$$\text{ARITH 5.2} \quad -a-b = -b-a.$$

Ferner darf die Juxtaposition auch als assoziativ vorausgesetzt werden, d.h. für beliebige Terme r , s und t gilt: $(r(st)) = ((rs)t)$. Daraus folgt nicht nur das von Leibniz notorisch "vergessene", d.h. nie explizit formulierte, aber immer wieder stillschweigend benutzte "echte" Assoziativgesetz

ARITH 6 $(a+b)+c = a+(b+c)$,

sondern auch das Pendant

ARITH 7 $(a+b)-c = a+(b-c)$.

Denn im Rahmen der "Vorzeichen-theorie" läßt sich die Subtraktion $s-t$ als Position bzw. Addition des negativen Terms $-t$, d.h. als $s+(-t)$ auffassen; deshalb kann man ARITH 6 auch auf den Fall $(a+b)-c$ im Sinne von $(a+b)+(-c)$ anwenden und erhält so: $(a+b)+(-c) = a+(b+(-c)) = a+(b-c)$.

Mit Hilfe von ARITH 7 lassen sich dann insbesondere die Korollare:

ARITH 8.1 $(a+b)-b = a$

ARITH 8.2 $(a-b)+b = a$,

bzw. die damit äquivalenten Prinzipien

ARITH 9.1 $a+b = c \rightarrow c-b = a$

ARITH 9.2 $a-b = c \rightarrow c+b = a$

beweisen, die auf allgemeinere Art als das obige ARITH 2 zum Ausdruck bringen, daß $+$ und $-$ entgegengesetzte Operatoren darstellen.

Leibniz selber skizziert in Cap. 3 des unveröffentlichten Fragments "De Aequalitate, De Additione, De Subtractione" zunächst für ARITH 8.1 den folgenden Beweis: "(...) $a+b-b = a$. Nam $a+b-b = (\text{per } \dots) a+0 = (\text{per } \dots) a$. Q.E.D." (LH XXXV, I, 9, Bl. 19). Die Auslassungszeichen ' $\dots$ ' deuten dabei an, daß Leibniz eine Numerierung der jeweiligen Prinzipien vorgesehen hatte, diese aber letztlich (wohl aus Zeitmangel) nicht durchführte. Aufgrund des Kontextes sind die Lücken jedoch leicht wie folgt zu schließen. Wegen ARITH 7 ist $(a+b)-b = a+(b-b)$; wegen ARITH 2 ferner $a+(b-b) = a+0$; also wegen ARITH 3.1 $a+0=0$, d.h. insgesamt $(a+b)-b = a+(b-b) = a+0 = a$. Daß Leibniz mit seiner klammerlosen Schreibweise ' $a+b-b$ ' genauer ' $(a+b)-b$ ' gemeint haben muß, geht aus der unmittelbar folgenden Passage hervor, die eine alternative Formulierung des gleichen Gesetzes präsentiert: "(...) Si $a+b = c$ erit $c-b = a$. Nam $c-b = (\text{ex hypothesi}) a+b-b = (\text{per praecedentem}) a$ Q.E.D." (*ibid.*) Analog skizzierte Leibniz für das Gesetz ARITH 9.2 den folgenden Beweis: "Si $a-b = c$ erit $a = c+b$. Nam ob $a-b = c$ fiet $c+b = a-b+b = (\text{per } \dots) a$ Q.E.D." (LH XXXV, I, 9, Bl. 20). Ein ausführlicher Beweis von ARITH 8.1 würde unter doppelter Anwendung von ARITH 4 und ARITH 7 wie folgt ausschauen: $(a-b)+b = b+(a-b) = (b+a)-b = (a+b)-b = a+(b-b) = a+0 = a$.

Wie sich gleich herausstellen wird, spielen die Strukturgesetze ARITH 6, 7 samt ihren Korollaren ARITH 8, 9 bei der Übertragung auf den Bereich der "realen" Addition bzw. Subtraktion von (Mengen von) Dingen eine ebenso wichtige Rolle wie das folgende Gesetz:

ARITH 10 $a-(b+c) = (a-b)-c$.

Leibniz selber formulierte es in etwas elliptischer Form als " $-(a+b) = -a-b$ " mit dem Hinweis, daß dieses Gesetz Kraft der Bedeutung der Klammer gelte: "Est potestas Vinculi" (LH XXXV, I, 9, Bl. 19).

Nach diesem Abriß der wichtigsten Gesetze der arithmetischen Addition und Subtraktion bleibt nun die "reale" Minus-Operation zu untersuchen,

die Leibniz in einem systematisch – und deshalb wohl auch chronologisch – ersten Ansatz, nämlich im Fragment # 184, mit anderer Terminologie und Symbolik wie folgt als "Gegenteil" der Addition charakterisierte:

"*Detractivus* (oppositus Appositivo) ut $-B$ seu *demto* B , sive *minus* B . Scilicet $A-B$ seu *Ademto* B significat B esse omittendum sive rejiciendum si cum ipso $-B$ reperiatur sive $B-B$ se mutuo tollere, ita ut $C+B-B$ seu $B+C-B$ sit ∞C . Itaque si $A \infty B+C$ erit $A-B \infty C$ nam $A-B \infty B+C-B$ quod ∞C " (A VI, 4, 878).

Demzufolge wäre die Minus-Operation nicht nur im Sinne des Prinzips

MINUS 1 $A-A = 0$

das "Gegenteil" der Addition, sondern es würden auch, wie in der Arithmetik, die allgemeineren Prinzipien

Minus 2a $(A+B)-B = A$

Minus 2b $A+B = C \rightarrow C-B = A$

gelten. Dies ist jedoch, wie Leibniz bald selber erkannte, ein Irrtum. So findet sich nämlich im systematisch (und chronologisch?) zweiten Ansatz, dem "Specimen Calculi Coincidentium", folgende Erläuterung:

"29) Signo + hactenus sumus usi ad designandum unum collectivum fieri ex pluribus; in quo plura insint, et quod ipsis simul sumtis coincadat. Nunc signo – utemur ad designandum, aliqua ab alio esse detrahenda, ut contrarium fiat signi +. Itaque si $A+B \infty C$, erit $A \infty C-B$, et A dicitur *Residuum*" (A VI, 4, 819).

Wie im zuvor betrachteten Fragment # 184 glaubt Leibniz also zunächst, das Prinzip ARITH 8.1 bzw. ARITH 9.1 in der Gestalt Minus 2b auf den Bereich "realer" Entitäten übertragen zu dürfen; und er "beweist" dann im § 30 mit Hilfe des ungültigen Minus 2b das gültige Gesetz MINUS 1 wie folgt: " $C-C \infty Nihilo$. Nam $C \infty C+Nih$. per 28 [d.h. gemäß NIH 1]. Ergo $C-C \infty Nih$. per [29]." Wie die Marginalie "Sed opus est A et B nihil habere commune" zeigt, wurde Leibniz jedoch bald darauf klar, daß Minus 2b in der oben genannten allgemeinen Form ungültig ist und auf *inkommunikante* Terme A , B eingeschränkt werden muß:

MINUS 3a $\neg K(A,B) \rightarrow (A+B = C \rightarrow C-B = A)$

MINUS 3b $\neg K(A,B) \rightarrow (A+B)-B = A$.

Denn angesichts des Idempotenzprinzips PLUS 1 könnte man andernfalls beweisen, daß jeder Term A mit dem Nichts zusammenfällt:

"Nam exempli causa $A+A \infty A$, ergo fieret $A \infty A-A$. Jam (per 30) $A-A \infty Nihilo$, ergo fieret $A \infty Nihilo$ " (A VI, 4, 819).

Eine weitere Marginalie zum späteren § 34 "Imo non sequitur nisi in incommunicantibus" zeigt, daß Leibniz sich aufgrund dieser Erkenntnis gezwungen sah, auch das dort aufgestellte und mittels § 30 "bewiesene" Prinzip "Si $A+B \infty D+C$ et $A \infty D$ erit $B \infty C$ " (A VI, 4, 820), d.h.

Minus 4 $A+B = C+D \wedge A=C \rightarrow B=D$,

bzw. vereinfacht

Minus 5 $A+B = A+C \rightarrow B=C$,

analog auf inkommunikante Terme einzuschränken. Statt Minus 4 gilt also nur das (bereits in Abschnitt 5.2 diskutierte) Prinzip KOMM 5b: $\neg$

$K(A,B) \wedge \neg K(C,D) \wedge A+B = C+D \wedge A=C \rightarrow B=D$, und an die Stelle von Minus 5 muß entsprechend KOMM 6: $\neg K(A,B) \wedge \neg K(A,C) \wedge A+B = A+C \rightarrow B=C$ treten.

In noch einer weiteren Marginalie des gleichen Fragments macht Leibniz sich auf andere Weise klar, daß das Prinzip Minus 5 unbedingt zu KOMM 6 abgeschwächt werden muß, d.h. daß der fragliche Schluß die Prämisse der Inkommunikanz der jeweiligen Terme voraussetzt. Er diskutiert dort nämlich das "Problem": "Coincidentia assignare talia Efficere ut ab ipsis detrahendo eadem, residua non coincident" und gibt das folgende Beispiel: " $(G+M)+(M+H) \infty (G+M)+M$ " (A VI, 4, 822). Dabei setzt er mit Hilfe von (unter die jeweiligen Terme gezeichneten) Klammern $(G+M) = A$ und $(M+H) = B$ und erhält so das gewünschte Beispiel dreier Terme A, B und M, so daß $A+B = A+M$, obwohl $B \neq M$ ist. Diese Einsicht übernahm Leibniz übrigens ziemlich wörtlich bei der Niederschrift der reifen Fassung des Plus-Minus-Kalküls, wo er das gleiche Beispiel (nur mit anderen Termbuchstaben) als Lösung des "Problems" präsentierte: "Efficere ut ex non coincidentibus ad data coincidentia additis constituentur tamen coincidentia. Si $A \infty A$ dico reperiri posse duo B et N , sic ut B non sit ∞N et tamen $A+B$ sit $\infty A+N$ " (A VI, 4, 853).

Die verbleibenden Hauptschwierigkeiten der Minus-Operation betreffen vor allem die Frage der Kompensation bzw. der Annihilation. Zur Erinnerung: Von einer Kompensation spricht Leibniz, wenn innerhalb eines komplexen Terms C "dasselbe gesetzt und abgezogen wird", d.h. wenn C sowohl einen Teilterm der Form $+B$ als auch einen Teilterm $-B$ enthält; und eine "Destruktion" oder Annihilation bedeutet, daß man für den gesamten Teilausdruck $[\dots]+B[\dots]-B$ das 'Nichts' bzw. '0' setzt. Eine spezielle Form der Annihilation wird durch das obige Gesetz MINUS 1 zum Ausdruck gebracht, demzufolge stets $(A-A) = 0$ ist. Die Frage jedoch bleibt, ob bzw. wann sich die Position (Addition) und die Subtraktion von A innerhalb größerer Termkomplexe aufhebt. In diesem Zusammenhang ist zunächst die folgende Verallgemeinerung des Gesetzes MINUS 1 zu betrachten, die Leibniz nicht nur als Scholium zu Axiom 2 des "Non inelegans Specimen" erwähnte, sondern auch in dem Fragment # 179 – offenbar einer Vorstudie zu # 178 – wie folgt formulierte:

"Si idem ponitur et detrahitur, quicquid inde in alio constituitur coincidit *Nihilo*, seu A (quotiescunque ponitur in aliqua re constituenda) $- A$ (quotiescunque detrahitur in eadem) $\infty Nih.$ seu $(A+A+Aetc) - (A+A+Aetc.) \infty Nih.$

Schol. hoc est $A-A \infty Nih$, si non amplius adsit A , in re de qua agitur constituenda; vel $(A+A) - A \infty Nih.$, si bis adsit in toto posito et semel in toto detrahendo; vel $A-(A+A) \infty Nih.$, si contra" (A VI, 4, 855).

Die Tatsache, daß Leibniz an dieser Stelle ausnahmsweise Klammern (bzw. genauer: Überstreichungen in der Funktion von Klammern) benutzte, spricht wohl dafür, daß er *irgendwie gespürt* hat, daß die von ihm diskutierte Problematik der Kompensation und der Annihilation *auch* mit der logischen Struktur der jeweiligen Terme zusammenhängt. Denn ohne Klammersetzung würde das obige Beispiel der zweifachen Setzung von A bei einfacher Subtraktion desselben Terms zu einem Widerspruch führen bzw. genauer zu einer Trivialisierung des Plus-Minus-Kalküls dergestalt, daß jeder Term A mit 0 zusammenfällt. Einerseits läßt sich ja $A+A-A$ im Sinne von $(A+A)-A$ aufgrund der bisherigen Gesetze des Plus-Minus-Kalküls auf $A-A$ bzw. auf 0 reduzieren; andererseits wäre jedoch $A+(A-A) = A+0 = A$. Diese Überlegung macht übrigens auch deutlich, daß das Gegenstück zum "unechten" Assoziativgesetz ARITH 7

Minus 6 $(A+B)-C = A+(B-C)$

im Falle der "realen" Addition und Subtraktion ungültig ist und daß deswegen bei komplexen Termen, die positive und negative Teilterme enthalten, unbedingt entsprechende Klammern gesetzt werden müssen. Dieses Faktum ist Leibniz leider nicht hinreichend klar geworden.

So spricht er im Anschluß an das obige Zitat von dem "Problema aliquam rem ita constituere ex pluribus, ut pro eodem in ea expresse posito et detracto, non liceat substituere *Nihil*" (*ibid.*) und bringt den folgenden (partiellen) Lösungsvorschlag vor: "Expressa ejusdem positio et detractio in aliquo constituendo se mutuo destruunt, si nihil adsit tacita" (A VI, 4, 856). D.h. nach Leibniz darf in einem komplexen Term C für den explizit formulierten Teilausdruck '[...]+B[...]-B' stets '0' gesetzt werden, sofern B nicht *implizit* noch in den restlichen Termen von C vorkommt. Die letztere Bedingung soll insbesondere dann erfüllt sein, wenn B mit den restlichen, in C vorkommenden Termen inkommunikant ist. Zum Beispiel soll gelten: "Si $A+N-M-N \infty P$, et N cum A , itemque N cum M sit incommunicans, erit $A-M \infty P$ " (*ibid.*), während eine entsprechende Annihilation im Falle inkommunikanter Terme nicht gewährleistet ist: "Sed in casu communicationis constructio non est tuta" (A VI, 4, 857).

Tatsächlich jedoch hängt die Frage, unter welchen Bedingungen man innerhalb von C den Teilterm '[...]+B[...]-B' weglassen bzw. mit 0 gleichsetzen darf, nicht alleine davon ab, ob B in den übrigen Termen von C explizit oder implizit vorkommt, sondern auch von der logischen Struktur des Gesamtterms, wie sie eigentlich stets durch geeignete Klammerung zum Ausdruck gebracht werden müßte. Leibnizens obige Behauptung, die in der leicht vereinfachten Form " $A+N-M-N \infty A-M$ [si] A, N, M sint incommunicantia" (A VI, 4, 852) als 1. Unterfall von Theorem IX auch in die Endfassung des Plus-Minus-Kalküls übernommen wurde, besagt bei der naheliegenden Lesart so viel wie:

MINUS 7 $\neg K(A,N) \wedge \neg K(M,N) \rightarrow ((A+N)-M)-N = A-M$.

Liest man den von Leibniz ohne Klammern geschriebenen Term $A+N-M-N$ hingegen als $(A+(N-M))-N$, so ergäbe sich das (vermutlich) ungültige Prinzip (*) $\neg K(A,N) \wedge \neg K(M,N) \rightarrow (A+(N-M))-N = A-M$. Für den Spezialfall $M=A$ folgt hieraus (**) $\neg K(A,N) \rightarrow (A+(N-A))-N = A-A$. Unter der noch zu diskutierenden Voraussetzung, daß die Subtraktion eines mit A inkommunikanten Terms B gar nichts bewirkt, d.h. daß gilt:

MINUS 8 $\neg K(A,B) \rightarrow A-B = A$,

erhielte man mit (**) deshalb den "Widerspruch", daß jeder Term A mit 0 zusammenfällt. Denn einerseits wäre unter der Voraussetzung $\neg K(A,N)$ gemäß MINUS 8 $(N-A)=N$, also $(A+(N-A))-N = (A+N)-N$, welches gemäß MINUS 3b mit A zusammenfällt; andererseits wäre gemäß (**) $(A+(N-A))-N = A-A$, d.h. gemäß MINUS 2 = 0. Unabhängig von der Frage der Geltung von MINUS 8 sollte damit jedenfalls deutlich geworden sein, wie wichtig es ist, die genaue logische Struktur komplexer Terme durch Klammern hervorzuheben. Leibniz hat dies jedoch nicht nur in den flüchtigen Vorstudien, sondern auch in der Endfassung des Plus-Minus-Kalküls sträflich vernachlässigt. Speziell Theorem IX strotzt nur so von Formeln der Art " $A+B-B-G$ " oder " $H+E+E+F+G-E-F-G-K-F$ ", die je nach Klammerung ganz unterschiedlichen Sinn ergeben. Dabei wird man allerdings davon ausgehen dürfen, daß solche Ketten von Additionen und Subtraktionen in der Regel in ihrer natürlichen Reihenfolge verstanden werden sollen, d.h. z.B. $A+B-B-G$ im Sinne von $((A+B)-B)-G$, usw.

Im Zusammenhang mit MINUS 8 stellt sich die allgemeine Frage, unter welcher Voraussetzung die Minus-Operation ($A-B$) überhaupt wohldefiniert sein soll. Bei der Endfassung des Plus-Minus-Kalküls hatte Leibniz zunächst die vorsichtiger Variante ins Auge gefaßt, bei der ein Term B nur dann von A abgezogen werden darf, wenn B ganz in A enthalten ist. Im weiteren Verlauf desselben Fragments betrachtet er jedoch auch Fälle, wo B zwar mit A kommunikant, aber nur teilweise in A enthalten ist. Und in anderen Fragmenten, speziell im "Specimen Calculi Coincidentium" erwägt er als Postulat, den Term ($A-B$) für beliebige A und B als wohlgeformt zuzulassen:

"33) Hic cuicunque apponi potest privatio cujuscunque, est instar postulati, sit A , et B , scribi potest $A-B$ " (A VI, 4, 820).

Nun wäre es sicherlich lohnend, beide Alternativen bis ins letzte logische Detail zu verfolgen und zu überprüfen, welche dieser Konzeptionen mit welchem (wirklichen oder mutmaßlichen) Theorem der verschiedenen Entwürfe des Plus-Minus-Kalküls verträglich ist. Nicht nur aus Gründen des zur Verfügung stehenden Platzes will ich mich allerdings auf eine Diskussion des zweiten Ansatzes beschränken. Denn erstens wurde die "konservative" Variante des Plus-Minus-Kalküls bereits in der äußerst ausführlichen Studie von Dürr (1930) untersucht. Zweitens gestattet die "liberale" Alternative eine interessantere und reichhaltigere Rekonstruktion, die auch den Intuitionen und Intentionen von Leibniz insgesamt besser zu entsprechend scheint.

Nicht alle diese Intuitionen, die primär auf Analogiebetrachtungen zu Gesetzen der Arithmetik beruhen, sind allerdings konsistent in das Ensemble der bisherigen Theoreme des Plus-Minus-Kalküls integrierbar. Dies gilt speziell für die Leibnizsche Konzeption semi-privativer und privativer Terme bzw. Dinge, wie sie in den §§ 31 und 32 des "Specimen Calculi Coincidentium" entwickelt wird:

"32) Omnis positio quae inest in E sit G , et omnis privatio quae inest in E sit C , sic ut sit $E \propto G-C$. Jam omne quod commune est ipsi G et C sit H , et sit $G \propto H+L$, et $C \propto H+M$, fiet $E \propto H+L-H-M$ seu (per 30) $E \propto L-M$ et L atque M nihil amplius habebunt commune, quod si jam L et M (incommunicantia) ambo sint aliquid positivum, erit *Eres semiprivativa*; sin erit $M \propto Nih.$ erit $E \propto L$ seu E erit *res positiva*, si scilicet id omne H quod inest toti privationi C , insit etiam positioni G ; denique sin sit $L \propto Nih.$, erit $E \propto -M$ seu E erit *res privativa*, si nempe omne H quod est in tota positione G insit etiam privationi C " (A VI, 4, 820).

Alle Terme der Gestalt $(A-B)$ (bzw. alle durch solche Terme beschriebenen "Dinge") lassen sich nach Leibniz also in drei Klassen einteilen. Positiv ist $A-B$ genau dann, wenn B ursprünglich echt in A enthalten war, so daß nach Subtraktion von B der positive Rest $(A-B)$ übrigbleibt. Privativ hingegen ist $A-B$, wenn durch die Subtraktion von B "mehr" von A abgezogen wird, als in A ursprünglich enthalten, d.h. wenn A selber eine echte Teilmenge von B war. Semi-privativ schließlich ist $A-B$, wenn einerseits durch die Subtraktion von B nicht alle ursprünglichen positiven Elemente aus A weggenommen wurden, andererseits aber auch nicht das ganze B von A abgezogen wurde, so daß einige Elemente aus B (weil sie nicht in A enthalten waren) innerhalb von $(A-B)$ als privativer bzw. latent negativer Teil verbleiben. Eine semi-privative Entität würde insbesondere immer dann entstehen, wenn man von einem (nichtleeren) A ein damit inkommunikantes (nichtleeres) B abzieht.

Die "Privativität" der (semi-)privativen Entitäten $(A-B)$ würde sich *formal* darin äußern, daß bei nachträglicher Addition eines entsprechenden Terms C nicht das ganze C zu $A-B$ hinzugenommen wird, sondern nur der um B verminderte Teil. So meint Leibniz in dem "frühen" Fragment # 185:

"Hinc si ponatur $D-B$, et D non contineat B , non ideo putandum est notam omissivam nihil operari. Saltem enim significat provisionaliter, ut ita dicam, et in antecessum, si quando contingat augeri $D-B$ per adjectionem alicujus cui insit B , tunc saltem sublationi illi locum fore. Exempli causa si $A \propto B+C$ erit $A+D-B \propto D+C$ " (A VI, 4, 878).

In # 173 heißt es ähnlich, nur noch etwas ausführlicher:

"31) Si ab aliquo $[B]$ detrahi jubeatur $[C]$ quod ipsi non inest, tunc residuum A seu $B-C$ erit res semiprivativa, et si apponatur alicui D , tunc $D+A \propto E$ significat D quidem et B esse ponenda, sed tamen a D prius esse removendum C , si quidem ei inest. Quod si insit, seu si $D \propto C+F$ fiet $E \propto C+F+B-C$. Hoc est (per 30) $E \propto F+B$ " (A VI, 4, 819).

Daraus ergäbe sich in dem Spezialfall $D=B$, daß grundsätzlich $C+(B-C)$ bzw. $(B-C)+C = B$ wäre, d.h. man erhielte als Gegenstück zu ARITH 8.2 das Prinzip:

Minus 9 $(A-B)+B = A$.

In dem kurzen, aber wichtigen Fragment # 180 formulierte Leibniz eine Variante dieses Prinzips, nämlich das Pendant zu ARITH 9.2:

Minus 10 $(A-B) = C \rightarrow C+B = A$,

wie folgt:

"Et ita patet quod signum detractiois seu contrarietatis nihil aliud est quam expectativa futurae sublationis, ut $L-M \propto P$ si nihil commune ipsis L et M hoc significat $P+M$ fore $\propto L$ " (A VI, 4, 859).

Daraus würde im Spezialfall $A=0$ für den privativen Term $(0-B)$, den Leibniz gelegentlich syntaktisch nicht ganz präzise als " $-B$ " bezeichnet, folgen:

Minus 11 $(0-B)+B = 0$.

Dieses Prinzip illustriert nun zwar deutlich, was Leibniz vor Augen hatte, als er davon sprach, daß bei Subtraktionen $(A-B)$ nicht nur das Nichts, sondern sogar "weniger als Nichts" entstehen könne. Doch zugleich zeigt sich, daß – anders als in der Mathematik, wo in der Tat jede negative Zahl "weniger als nichts" ist – die Existenz privativer *Dinge* (bzw. Mengen von Dingen) mit den übrigen Grundgesetzen des Plus-Minus-Kalküls logisch unverträglich ist. Das erste, mit Minus 10 verbundene Problem besteht darin, daß aus der Annahme $(0-B)+B = 0$ bzw. $B+(0-B) = 0$ mit INKL 1 folgen würde, daß B in 0 enthalten ist. Wegen des trivialen, umgekehrten $0 \subseteq B$ würde damit aber wiederum jeder Term B mit dem "leeren" Term 0 zusammenfallen.

Um diese Konklusion zu vermeiden, könnte man natürlich daran denken, das Prinzip INKL 1 entsprechend so einzuschränken, daß für $A \subseteq B$ die Existenz eines *positiven*, nicht aber die eines privativen Terms Y mit $(A+Y) = B$ verlangt wird. Die formale Durchführung dieses Gedankens würde aber eine präzise (zirkelfreie) Klassifikation aller Terme in positive und negative Terme voraussetzen, die – wie weiter oben im Zusammenhang mit der "metaphysischen" Definition des Nichts angedeutet wurde – alles andere als einfach ist. Außerdem würden dadurch noch längst nicht alle Inkonsistenzen beseitigt, die sich aus dem Zusammenspiel von Minus 11 mit den Grundaxiomen der "realen" Addition und Subtraktion ergeben. Die latent privative Kraft von $(0-B)$ soll sich laut Leibniz ja dadurch ausdrücken, daß bei nachträglicher Addition von B das (einfach?) gesetzte $+B$ sich mit dem abgezogenen $-B$ aufhebt, d.h. 0 ergibt. Was ist aber, wenn man zu $(0-B)$ im Nachhinein *zweimal* B addiert? Einerseits würde aus Minus 11 durch Addition von B zu beiden Seiten der Gleichung folgen, daß $((0-B)+B)+B = 0+B = B$ ist. Andererseits ist der linke Term wegen der Assoziativität von $+$ mit $(0-B)+(B+B)$, d.h. angesichts von PLUS 2 mit $(0-B)+B$ äquivalent, und also wegen Minus 11 auch mit 0 selber! Damit würde der Plus-Minus-Kalkül ein weiteres Mal in dem Sinne trivialisiert, daß jeder Term B mit dem leeren Term 0 zusammenfällt. Angesichts dieser Probleme muß man den Leibnizschen Gedanken von (semi-)privativen Entitäten innerhalb des Bereichs "realer Dinge" wohl oder übel

preisgeben und zu einer anderen Konzeption der Minus-Operation übergehen.

Wenn die Subtraktion eines nicht in A enthaltenen (bzw. genauer: mit A inkommutanten) Terms B jedoch keinerlei "latent privative" Wirkung haben darf, bleibt offenbar gar keine andere Alternative offen, als im Sinne des obigen Prinzips MINUS 8 $(A-B)$ mit B gleichzusetzen. Aus A etwas zu entfernen, was in A gar nicht enthalten ist, bedeutet eben, *nichts* zu entfernen. Daraus folgt in dem Spezialfall $A=0$, daß

MINUS 12 $0-B = 0$,

d.h. im Bereich der (Mengen von) "realen Dingen" gibt es einfach nichts, was "weniger als Nichts" wäre. Dies folgt übrigens auch aus einem weiteren Gesetz, das Leibniz selber - zumindest in seinen "besseren Momenten" - als gültig angenommen bzw. stillschweigend vorausgesetzt hat, nämlich aus dem zu ARITH 10 analogen Prinzip:

MINUS 13 $A-(B+C) = (A-B)-C$.

Denn setzt man hier insbesondere $A = B = C$, so ergibt sich: $A-(A+A) = (A-A)-A$; mit PLUS 2, MINUS 1 sowie dem trivialen

MINUS 14 $A-0 = A$

folgt also $0 = A-A = A-(A+A) = (A-A)-A = 0-A$, d.h. MINUS 12.

Leibniz hat das Strukturgesetz MINUS 13 bei zahlreichen "Rechnungen" innerhalb des Plus-Minus-Kalküls angewendet, speziell beim Beweis von Theorem IX des "Non inelegans Specimen". So setzt er z.B. bei der Diskussion von "Causus 2" innerhalb der Gleichung " $A+B-B-G \propto F$ " für A den Term $E+Q+M$ ein, für B entsprechend $N+M$ und für G die Summe $E+H+M$, und er erhält so: " $F \propto E+Q+M+N+M-N-M-E-H-M$ ". Da der ursprünglich ohne Klammern geschriebene Term $A+B-B-G$ offensichtlich im Sinne von $((A+B)-B)-G$ zu verstehen war, müßte man den nach Substitution der Werte entstehenden Ausdruck eigentlich korrekter in der Form $((E+Q+M)+(N+M))-(N+M)-(E+Q+M)$ schreiben. Leibnizens stillschweigende Umformung in die zitierte Kette von einzelnen Additionen und Subtraktionen macht jedenfalls deutlich, daß er im Sinne des Prinzips MINUS 13 die Subtraktion einer Summe $L-(N+M)$ stets für äquivalent mit der sukzessiven Subtraktion der einzelnen Terme, d.h. $(L-N)-M$, hält.

In diesem Zusammenhang betrachte man kurz den 1. Unterfall des fraglichen Theorems, den Leibniz in informeller Weise wie folgt ausdrückt: "*Ex compensatione expressa sequitur destructio compensati, si nihil sit in compensatione destruenda, quod tacite repetitum constitutionem ingrediatur extra compensationem*". Wie die anschließende Formalisierung " $A+N-M-N \text{ est } \propto A-M$, et A, N, M sint incommunicantia" deutlicher macht, wird hier die Annihilation oder Destruktion der expliziten Kompensation $[...] + N[...] - N$ für den Fall als gültig erklärt, wo nichts, was in dem zu annihilierenden Term N enthalten ist, noch in einem anderen Konstituenten, d.h. in A oder in M, enthalten ist. Die letztere Bedingung läßt sich natürlich so umformulieren, daß man die Inkommunikanz von N mit A einerseits und mit M andererseits postuliert. Tatsächlich würde es jedoch ausreichen, lediglich die Voraussetzung $\neg K(N,A)$ zu machen, d.h. es gilt sogar das verstärkte Theorem:

MINUS 15 $\neg K(A,B) \rightarrow ((A+B)-C)-B = A-C$.

Denn aufgrund von MINUS 13 ist zunächst $((A+B)-C)-B = (A+B)-(C+B)$; wegen der trivialen Kommutativität der Addition fällt der letztere Term mit $(A+B)-(B+C)$ zusammen, und diesen darf man wiederum gemäß MINUS 13 in $((A+B)-B)-C$ umformen. Nun ist aber unter Voraussetzung von $\neg K(A,B)$ gemäß MINUS 3 $((A+B)-B)=A$, woraus dann unmittelbar die Behauptung folgt.

Den gerade benutzten "Trick" der Permutation zweier zu subtrahierender Terme im Sinne des aus MINUS 13 folgenden Korollars

MINUS 16 $(A-B)-C = (A-C)-B$

hat Leibniz übrigens beim Beweis von Theorem IX selber stillschweigend angewendet. Während nämlich der bei einer Annihilation zur Debatte stehende komplexe Term – wie beim 1. Unterfall formuliert – allgemein die Struktur $A+B-C-B$ (im Sinne von $((A+B)-C)-B$) haben müßte, variiert Leibniz diese Formel im "Casus 2" und "Casus 3" ohne weiteren Kommentar zu $A+B-B-C$! Dies setzt aber gerade die Geltung des keineswegs trivialen Strukturgesetzes MINUS 16 voraus. Auf den näheren Inhalt des 2. Unterfalls von Theorem IX gehen wir erst im nächsten Abschnitt ein, weil er den weiteren Operator des Kommune zweier Terme voraussetzt. Zum Abschluß der Diskussion dieses Abschnitts sei zum einen das relativ triviale Theorem X aus # 178 nachgetragen:

"Detractum et Residuum sunt incommunicantia. Si $L-A \propto N$. Dico A et N nihil habere commune. Nam ex definitione detracti et Residui omnia quae sunt in L manent in N praeter ea quae sunt in A , quorem nihil manet in N " (A VI, 4, 853); formal:

KOMM 9 $\neg K(B, A-B).$

Zum zweiten – und wichtiger – sei festgehalten, daß der Leibnizsche Minus-Operator in der hier rekonstruierten Gestalt die heute übliche Interpretation der mengentheoretische Subtraktion gestattet:

Original	Symbolisierung	Moderne Interpretation
$A-B, A?B, A \text{ B}$	$A-B$	$A-B$, d.h. $\{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Leibnizens "reale" Subtraktion innerhalb des Plus-Minus-Kalküls entspricht also der modernen mengentheoretischen *Subtraktion* und nicht, wie Schröter (1974: 32) meinte, der *Komplementbildung*. Eine solche Subtraktion ist nun nicht nur in Bezug auf "extensionale" Mengen von Einzeldingen zulässig, sondern auch in Anwendung auf "intensionale" Begriffe, sofern man die Intensionen von Begriffen à la Leibniz als Mengen von "Ideen" oder Attributen konzipiert: $A-B$ entspricht dann jenem Begriff, der genau die Attribute enthält, die zur Intension von A , aber nicht zur Intension von B gehören, d.h. $(A-B)_I = A_I - B_I$. Was dies jedoch im konkreten Einzelfall bedeutet, ist intuitiv alles andere als klar. Allem Anschein nach hat Leibniz nur ein einziges Mal, nämlich in der Fußnote zu Theorem VIII des "Non inelegans specimen" versucht, die Subtraktion von Begriffen inhaltlich durch ein Beispiel zu erläutern. Er schreibt dort:

"Aliud est detractio in notionibus, aliud negatio. V.g., Homo non rationalis est absurdum seu impossibile; sed licet dicere Simia est homo nisi quod non est rationalis. [...] Homo – Rationalis aliud quam homo non rationalis. Nam homo – Rationalis $\propto$ Brutum, sed homo non rationalis est impossibile. Homo – Animal – rational est Nihilum" (A VI, 4, 851).

Daß die begriffliche Subtraktion etwas anderes als die Negation (bzw. Komplementbildung) darstellt, steht außer Frage. Ebenso läßt sich mit Hilfe des Strukturgesetzes MINUS 13 leicht beweisen, daß die Subtraktion $((Homo - Animal) - rational)$ den "leeren" Begriff 0 ergibt. Denn nach traditioneller Auffassung ist der Begriff des Menschen, H, einfach die Summe der Begriffe A = 'Lebewesen' und R = 'vernunftbegabt'. Also ist $(H - A) - R = ((A + R) - A) - R$, d.h. wegen MINUS 13 = $(A + R) - (A + R)$, und damit gemäß MINUS 1 = 0. Ob hingegen, wie Leibniz weiterhin behauptet, die Subtraktion $(Homo - rational)$ mit dem Begriff des vernunftlosen Tieres, *Brutum*, oder eventuell auch mit dem Begriff des Affen, *Simia*, zusammenfällt, sei dahingestellt.

5.4 Kommune und Proprium

Zur Abrundung unserer Rekonstruktion betrachten wir noch zwei weitere Operatoren, die Leibniz in den Hauptentwürfen des Plus-Minus-Kalküls zwar nur beiläufig erwähnt, in anderen Fragmenten jedoch etwas ausführlicher untersucht hat. Das Theorem XI des "Non inelegans Specimen" lautet:

"In duobus communicantibus id cui inest quicquid utrique commune est, et duo propria sunt tria incommunicantia inter se.

Sint A et B communicantia et $A \infty P + M$, et $B \infty N + M$, sic ut quicquid est in A et B, sit in M, nihil vero ejus in P et N, dico P, M, N esse incommunicantia. Nam tam P quam N sunt incommunicantia cum M, quia quod est in M est in A et B simul, at nihil tale est in P aut N. Deinde P et N sunt incommunicantia inter se, alioqui itidem quod ipsis commune est foret in A et B" (A VI, 4, 853).

Für kommunikante Terme A und B wird hier einerseits das "Kommune von A und B" als jener Term charakterisiert, der all das enthält, was sowohl in A als auch in B enthalten ist. Symbolisiert man dieses "Kommune von A und B" durch $A \bullet B$, so wäre also mit Hilfe von Quantoren zu präzisieren:

KOMMUNE 1 $A \bullet B := \iota X \forall Y (Y \subseteq A \wedge Y \subseteq B \rightarrow Y \subseteq X)$.

Ferner wird der "Rest" als das jeweilige "Proprium" (relativ zum anderen Term) bezeichnet, was man – mit Hilfe des Symbols $A \setminus B$ für das Proprium von A relativ zu B – wie folgt formalisieren könnte:

PROP 1 $A \setminus B := A - (A \bullet B)$.

Dieser Ansatz hätte den Vorteil, daß das Definiens $A - (A \bullet B)$ auch bei der im Fragment # 178 befürworteten "konservativen" Auffassung der Minus-Operation wohldefiniert ist. Denn das Kommune von A und B ist gemäß "Definition" stets in A (bzw. in B) enthalten; also darf man den Term $(A \bullet B)$ auf jeden Fall von A (bzw. von B) subtrahieren. Im Rahmen der "liberalen" Konzeption, wie sie im vorherigen Abschnitt erläutert und verteidigt wurde, könnte man das Proprium von A relativ zu B jedoch auch einfacher durch

PROP 2 $A \setminus B = A - B$

definieren. Beide Ansätze sind beweisbar äquivalent. Gemäß Leibnizens obigen Ausführungen läßt sich ja – unter Voraussetzung von $K(A, B)$ – der Term A in die Summe $M + P$ - bestehend aus dem Kommune von A und B einerseits und dem Proprium von A relativ zu B andererseits - disjunkt zerlegen:

KOMMUNE 2 $K(A, B) \rightarrow A = (A \bullet B) + (A \setminus B)$.

Analog ist– unter der gleichen Voraussetzung $K(A,B)$) – natürlich auch $B = (A \bullet B) + (B \setminus A)$. Deshalb läßt sich das Definiens von PROP 2, $A-B$, in der Gestalt $A-((A \bullet B) + (B \setminus A))$ darstellen und gemäß MINUS 13 zunächst in $(A-(A \bullet B))-(B \setminus A)$ umformen. Nun sind aber gemäß Theorem XI nicht nur die jeweiligen Propria P und N, d.h. $A \setminus B$ und $B \setminus A$, im Sinne von

KOMM 10a $\neg K(A \bullet B, A \setminus B)$

KOMM 10a $\neg K(A \bullet B, B \setminus A)$

mit dem Kommune $M = (A \bullet B)$ inkommunikant, sondern auch miteinander selber:

KOMM 11 $\neg K(A \setminus B, B \setminus A)$.

Der Term $(A-(A \bullet B))-(B \setminus A)$ bzw. (wegen PROPR 1) $(A \setminus B)-(B \setminus A)$ besteht somit aus disjunkten bzw. inkommunikanten Konstituenten und reduziert sich deshalb angesichts von MINUS 8 auf $(A-(A \bullet B))$ bzw. auf $(A \setminus B)$. Damit ist – zunächst unter der Voraussetzung $K(A,B)$ – insgesamt die Gleichung

MINUS 17 $A-B = A-(A \bullet B)$

bewiesen. Dieses Gesetz gilt jedoch auch im Falle der Inkommunikanz von A und B. Denn ganz grundsätzlich sind A und B genau dann kommunikat, wenn das Kommune von A und B nicht "leer" ist:

KOMMUNE 3 $K(A,B) \leftrightarrow A \bullet B \neq 0$.

Im Falle $\neg K(A,B)$ ist also $A \bullet B = 0$. Deshalb reduziert sich der Term auf der rechten Seite von MINUS 17, d.h. $A-(A \bullet B)$, auf $A-0 = A$. Aber auch der Term auf der linken Seite, $A-B$, fällt wegen $\neg K(A,B)$ gemäß MINUS 8 mit A zusammen.

Als nächstes betrachte man das Ende des kurzen Fragments # 180, wo Leibniz die Frage erörtert, wie man einen Term A mit Hilfe eines beliebigen anderen Terms N - bzw. umgekehrt N mit Hilfe von A - konstituieren kann.

"Etiam quidvis per quodlibet constitui potest. Ut sit N constituendum per A, fiat [...] $A+N \propto L$, unde si N et A sint incommunicantia fiet $L-A \propto N$. Sin communicantia sint duo ut A et B et B constitui debeat per A, fiat rursus $A+B \propto L$ et posito ipsis A et B commune esse N, fiet $A \propto L-B+N$ " (A VI, 4, 860).

Im Falle der *Inkommunikanz* von A und N ist also $(A+N)-A = N$; dies wurde in leicht variiert Form bereits oben als Gesetz MINUS 3b festgehalten. Neu und interessanter ist hingegen die Erkenntnis, daß sich im Falle der *Kommunikanz* von A und B die folgende Gleichung ergibt: $A = ((A+B)-B) + (A \bullet B)$. Nun fällt aber für $\neg K(A,B)$ gemäß KOMMUNE 4 der Term $A \bullet B$ mit 0 zusammen; deshalb läßt sich die Gleichung MINUS 3b, d.h. $(A+B)-B = A$, auch in der komplizierteren Form $A = ((A+B)-B)+0$ bzw. $((A+B)-B) + (A \bullet B)$ ausdrücken. D.h. es gilt in *beiden* Fällen die folgende Konstitution von A mit Hilfe von B:

KOMMUNE 4 $A = ((A+B)-B) + (A \bullet B)$.

Darüber hinaus hat Leibniz einen interessanten Weg gefunden, um umgekehrt das Kommune von A und B mit Hilfe von Additionen bzw. Subtraktionen zu konstituieren:

"Cognoscere utrum duo habeant aliquid commune, quod insit utrique, et invenire quodnam illud sit. Sint A et B , quaeritur an sit aliquod M , quod insit utrique. Solutio: fiat ex duobus unum $A+B$ quod sit L [...] et ab L auferatur unum constituentium A [...] residuum sit N , tunc si N coincidit alteri coincidentium[] B , nihil habebunt commune. Si non coincident, habebunt aliquid commune, quod invenietur, si residuum N quod necessario inest ipsi B detrahatur a B [...] et restabit M quaesitum commune ipsis A et B . Q.E.F." (A VI, 4, 859).

Man erhält also einerseits das Kriterium, daß zwei Terme A und B genau dann inkommunikant sind, wenn $(A+B)-A$ mit B (bzw. entsprechend $(A+B)-B$ mit A) zusammenfällt; d.h. das frühere Gesetz MINUS 3b läßt sich zu der *Äquivalenz*

MINUS 18 $(A+B)-B = A \leftrightarrow \neg K(A,B)$

verstärken. Andererseits kann man (zunächst für den Fall $K(A,B)$) das Kommune von A und B durch die folgenden Gleichungen "definieren":

KOMMUNE 5a $A \bullet B = B - ((A+B) - A)$

KOMMUNE 5b $A \bullet B = A - ((A+B) - B)$.

Diese Gesetze bleiben jedoch auch für den umgekehrten Fall $\neg K(A,B)$ gültig, denn der linke Term von KOMMUNE 5b fällt dann gemäß KOMMUNE 3 mit 0 zusammen; und für den rechten Term folgt gemäß MINUS 18 $A - ((A+B) - B) = A - A$, also ist $A - ((A+B) - B)$ ebenfalls = 0. Die Argumentation für den Fall KOMMUNE 5a verläuft natürlich völlig analog.

Wie die verschiedenen "Definitionen" und Gleichungen zeigen, ist unter dem Kommune zweier Mengen A und B ganz allgemein der mengentheoretische Durchschnitt von A und B zu verstehen, während das Proprium von A relativ zu B im Rahmen unserer "liberalen" Konzeption der Minus-Operation einfach mit der mengentheoretischen Differenz $(A-B)$ gleichgesetzt werden kann. Insgesamt ergibt sich deshalb die folgende Ergänzung der Interpretation des Plus-Minus-Kalküls:

Original	Symbolisierung	Moderne Interpretation
Commune ipsis A et B	$A \bullet B$	$A \cap B$, d.h. $\{x: x \in A \wedge x \in B\}$
Proprium	$A \setminus B$	$A - B$, d.h. $\{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Daß es sich hierbei – wie in den vorangehenden Abschnitten wiederholt behauptet wurde – um *die* (bzw. um *eine*) von Leibniz *intendierte* Interpretation handelt, bedeutet natürlich nicht, daß Leibniz sich der Details dieser Interpretation voll bewußt gewesen wäre. Ja, es bedeutet nicht einmal, daß diese Interpretation ein (zwingendes) Modell aller einschlägigen Prinzipien darstellen würde, die Leibniz in den verschiedenen

Ansätzen zum Plus-Minus-Kalkül in Erwägung gezogen hat. Angesichts der oben nachgewiesenen logischen Inkonsistenzen zwischen diesen Prinzipien – speziell zwischen den Grundgesetzen der "realen" Addition und der versuchsweisen Konzeption "privativer Dinge" – kann es ein solches Modell ja überhaupt nicht geben. Dennoch läßt sich mit gutem Recht behaupten, daß die vorgebrachte Interpretation "die meisten" bzw. die systematisch bedeutsamsten Leibnizschen Prinzipien als gültig erweist. Wenn ganz wenige von Leibniz erwogene Prinzipien als ungültig – weil mit der entwickelten mengentheoretischen Interpretation unverträglich – zurückgewiesen wurden, so konnte zudem oft noch gezeigt werden, worin der Leibnizsche Fehler verankert war, nämlich meistens in einer vorschnellen Übertragung arithmetischer Gesetze auf den Bereich "realer" Entitäten.

Die hier vorgestellte Rekonstruktion des Plus-Minus-Kalküls verfolgte methodologisch die Regel "Die guten ins Töpfchen, die schlechten ins Kröpfchen". Da es nun keinen absoluten Maßstab dafür gibt, welche logischen Prinzipien "gut" und welche "schlecht" sind, ist dieses Vorgehen in gewisser Weise willkürlich, d.h. es bleibt im Prinzip *möglich*, daß andere Autoren alternative Rekonstruktionen entwickeln, die den Leibnizschen Intentionen (bzw. Intuitionen) noch besser gerecht werden. Ungeachtet dieser theoretischen Möglichkeit bin ich mir jedoch sicher, daß die vorliegende Rekonstruktion den "wahren" Intentionen von Leibniz im folgenden Sinn entspricht: Wenn es mir vergönnt wäre, z.B. mit Hilfe einer Zeitmaschine die 300 Jahre zu überbrücken, die zwischen Leibnizens und meinem eigenen Geburtsjahr liegen; wenn ich auf diese oder eine andere Weise mit Leibniz eine Diskussion über die logischen Prinzipien des Plus-Minus-Kalküls führen könnte, dann würde ich jede Wette eingehen, daß Leibniz die hier entwickelte Interpretation letztendlich als die "beste" und als die von ihm selber eigentlich gesuchte akzeptieren würde.

Zur Illustration dieses Anspruchs betrachten wir abschließend das Fragment # 181, wo Leibniz anhand eines anschaulichen Beispiels eine weitere Formel ermittelt, um das Kommune von A und B durch Additionen und Subtraktionen auszudrücken. Um dem Leser das Verständnis zu erleichtern, wird das Beispiel zunächst in deutscher Übersetzung wiedergegeben:

"Ein Fürst hat 1000 Untertan und 100 Soldaten, von welchen einige zugleich Untertanen, andere aber Fremde sind; es werden diejenigen gesucht, welche zugleich Soldaten und Untertanen sind. Nachdem die Soldaten versammelt worden sind, sage man: tretet heraus, Untertanen; oder nachdem die Untertanen versammelt worden sind, sage man: tretet heraus, Soldaten. Wenn aber nur dieses Postulat angewendet werden darf: 'A von A+B abzuziehen', so wird man so vorgehen müssen: Es mögen vereinigt werden die Soldaten A und die Untertanen L, und vom Ganzen sollen gemäß dem Postulate die Soldaten A abgezogen werden; es werden dann diejenigen, welche bloß Untertanen sind, übrig bleiben. Da nun diejenigen, welche bloß Untertanen sind, in der Gesamtheit aller Untertanen enthalten sind, und gegeben sind, so werden nach demselben Postulat auch die übrigen gegeben sein, d.h. das Gesuchte ist gegeben. [...] Oder in anderer Weise, so daß A und L in derselben Weise behandelt werden. Von A+L möge A abgezogen werden, der Rest sei B; von derselben Wesenheit möge L abgezogen werden, der Rest sei M. Nun möge die gegebene Wesenheit B+M von A+L abgezogen werden, dann bleibt die gemeinsame Wesenheit H" (Dürr 1930: 105; vgl. auch Schmidt 1960, S. 306.)

Gemäß dem ersten Verfahren kann das gesuchte Kommune von A und L, H, also durch $L - ((A+L) - A)$ bestimmt werden – dies entspricht genau dem obigen Ansatz in KOMMUNE 5. Oder man setzt gemäß dem zweiten, "symmetrischen" Verfahren $H = (A+L) - (B+M)$ mit $B = (A+L) - A$ und $M =$

$(A+L)-L$. Auf diese Weise erhält man die Darstellung

KOMMUNE 6 $A \bullet B = (A+B) - \{((A+B)-A) + ((A+B)-B)\}$.

Dieses Gesetz exemplifiziert auf paradigmatische Weise zum einen, mit welcher verblüffenden Genialität und Intuition Leibniz mehr als 150 Jahre vor Boole die wichtigsten Gesetze der modernen Mengenalgebra gefunden hat. Die an das obige Zitat folgenden Schlußsätze des Fragments zeigen aber zum anderen auch, mit welchen – aus heutiger Sicht manchmal elementaren – Schwierigkeiten Leibniz zu kämpfen hatte und in welchen logischen Sackgassen er sich dann und wann verrannte. Die fragliche Passage lautet im Original, d.h. genauer in der Akademieausgabe:

"Via electitia videtur brevior, sed revera non est, nempe $A+L-A \infty B$, $L-B \infty H$ seu $L-A-L+A \infty H$, quae via est brevissima, seu $A+L-A-L \infty -H$, nam hic non licet compensare. Aliud est hic summam duorum, aliud singula seorsim detrahere" (A VI, 4, 861).

Bei einer ersten, flüchtigen Lektüre bereitet diese elliptische und kryptische Passage erhebliche Verständnisschwierigkeiten. Vielleicht hat Dürr sie aus diesem Grunde bei seiner Übersetzung ausgelassen. Die folgende, von Schmidt (1960: 306) vorgeschlagene Verdeutschung trägt jedenfalls wenig zu einem besseren Verständnis bei:

"Der ... Weg scheint kürzer, ist es aber in Wahrheit nicht. Nämlich $A+L-A \infty B$; $L-B \infty H$, oder $L-A-L+A \infty H$; dieser Weg ist der kürzeste, oder $A+L-A-L \infty H$. Doch ist es hier nicht erlaubt aufzurechnen. {Ein anderes ist es hier, die Summe von beiden, ein anderes, die einzelnen Glieder gesondert abzuziehen.}"

Das erste Problem betrifft die Aussage "Via electitia videtur brevior", und zwar nicht so sehr das ungewöhnliche Adjektiv 'electitia', das Schmidt nicht zu verdeutschen wußte – mit meinen bescheidenen Lateinkenntnissen würde ich es als Komparativ zu 'electus' interpretieren und dementsprechend 'via electitia' als den 'auserleseneren Weg' übersetzen. Das Problem besteht vielmehr darin zu verstehen, wann ein "Weg" zum Auffinden des Kommune von A und B *kürzer* ist als ein anderer. Bei den zu vergleichenden "Wegen" handelt es sich offenbar um die zuvor geschilderten Gleichungen KOMMUNE 5 und 6. Wenn die "Kürze" bzw. "Länge" dieser Wege durch die Länge der entsprechenden Formeln gemessen werden sollte, müßte man festhalten, daß der "Weg" gemäß KOMMUNE 5, also die Darstellung von H per $B - ((A+B) - A)$, deutlich kürzer ist als bei KOMMUNE 6, wo H ja mit dem komplexeren Ausdruck $(A+B) - \{((A+B) - A) + ((A+B) - B)\}$ gleichgesetzt wird. Offenbar will nun Leibniz mit den folgenden Ausführungen begründen, wieso der "Weg" KOMMUNE 5 der kürzere ist. Dann bleibt aber immer noch recht schleierhaft, wieso er zunächst meinte, der "auserlesenerere Weg" KOMMUNE 6 würde kürzer *erscheinen*.

Wie dem auch immer sei, die entscheidenden Probleme hängen nicht mit der Frage der Kürze oder Länge von KOMMUNE 5 bzw. KOMMUNE 6 zusammen, sondern betreffen den Gehalt der anschließenden Überlegungen: "nempe $A+L-A \infty B$, $L-B \infty H$ seu $L-A-L+A \infty H$ ". Der erste, klammerlose Term $A+L-A$ ist, wie der frühere Kontext klarmacht, im Sinne von $(A+L)-A$ zu verstehen. In Übereinstimmung mit der Überlegung "Von $A+L$ möge A abgezogen werden, der Rest sei B" wird also noch einmal der Hilfsterm B, der die Menge der "bloßen Untertanen", d.h. der Untertanen, die nicht zugleich Soldaten sind, beschreibt, durch $(A+L)-A$ definiert; dementsprechend drückt $L-B$ die Menge der Untertanen aus, die nicht zu B gehören, d.h. die nicht "bloße Untertanen" sind. Dies sind aber gerade jene Untertanen, die zugleich auch Soldaten sind. Ganz in Übereinstimmung mit KOMMUNE 5 wird hier also insgesamt der gesuchte Durchschnitt H – d.h. das Kommune von A und L – korrekt durch die Formel $L-B$ bzw. $L - ((A+L) - A)$ bestimmt.

In Leibnizens (notorisch) klammerloser Schreibweise nimmt dieses unterdrückte Zwischenglied seiner Überlegung die Gestalt $H = L - A + L - A$ an,

und diese wird offenbar anschließend wie eine arithmetische Kettenrechnung in $H = L - A - L + A$ umgeformt. Für diesen "kürzeren Weg" gibt Leibniz anschließend noch die Variante $H = A + L - A - L$ an, und er folgert dann, daß in diesem Ausdruck keine "Kompensation" - d.h. in der Terminologie von Fragment # 178: keine *Annihilation* - erlaubt ist. Denn würde man in dem Term $A + L - A - L$ das $+A$ mit dem $-A$ und entsprechend das $+L$ mit dem $-L$ "aufrechnen", so bliebe ja nur das Nichts übrig, während H im vorliegenden Fall gerade $\neq 0$ ist. Abschließend zieht Leibniz noch die weiterreichende Schlußfolgerung, daß es einen Unterschied macht, ob man von einem Term C die Summe $(A+B)$ abzieht oder die Terme im Sinne von $(C-A)-B$ einzeln subtrahiert. Denn – so wird man seine Überlegung sinngemäß rekonstruieren müssen – es ist stets $(A+L)-(A+L) = 0$; während im vorliegenden Beispiel $((A+B)-A)-L = H$ von 0 verschieden ist.

Auch wenn die so rekonstruierten Überlegungen recht schlüssig erscheinen, bleibt festzustellen, daß Leibniz hier eine ganze Reihe von Fehlern begeht, die die Konklusion "Aliud est hic summam duorum, aliud singula seorsim detrahere" keineswegs rechtfertigen. Gemäß dem früheren Prinzip MINUS 13 darf die Subtraktion $C-(A+B)$ *immer* in der Weise aufgelöst werden, daß man die einzelnen Summanden im Sinne von $(C-A)-B$ sukzessive subtrahiert. Die diesem Gesetz scheinbar entgegenstehende Gleichsetzung des (nichtleeren) H mit $A+L-A-L$ läßt sich aber aus den vorherigen Darstellungen von H so auch überhaupt nicht herleiten. *Erstens* macht Leibniz schon einen Fehler, wenn er $L-A+L-A$ (im Sinne von $L-((A+L)-A)$) in Analogie zu den arithmetischen Vorzeichenregeln in $L-A-L+A$ umformt. Eine solche Umformung würde das Prinzip

Minus 19 $C-(D-E) = (C-D)+E$

voraussetzen, welches in dieser Form ungültig ist. Denn für $D = E$ folgt aus Minus 19 die Gleichung $(C-D)+D = C$, die oben im Zusammenhang mit Minus 10 als nicht allgemein gültig erkannt wurde. Nun könnte man natürlich einwenden, daß auch wenn Minus 19 nicht *allgemein* gültig ist, dennoch im obigen Beispiel die Umformung von $L-((A+L)-A)$ in $(L-(A+L))+A$ durchaus korrekt sein könnte. Doch um aus diesem Term die weitere Darstellung " $L-A-L+A$ " im präziseren Sinne von $((L-A)-L)+A$ zu erhalten, müßte Leibniz *zweitens* gerade jenes Gesetz $C-(D+E) = (C-D)-E$, d.h. MINUS 13, anwenden, dessen Gültigkeit er im Schlußsatz (irrtümlicherweise) bestreitet. *Drittens* begeht Leibniz offenbar einen weiteren Fehler, wenn er die Darstellung von H als $((L-A)-L)+A$ – bzw. ohne Klammern geschrieben " $L-A-L+A$ " – im letzten Schritt in " $A+L-A-L$ " transformiert und hierin ein potentielles Gegenbeispiel zu MINUS 13 erblickt. Denn angesichts der Kommutativität der Addition könnte man $((L-A)-L)+A$ zwar in $A+((L-A)-L)$ umformen. Um eine potentielle Bedrohung für MINUS 13 darzustellen, müßte dieser Term jedoch ganz anders, nämlich in der Gestalt $((A+L)-A)-L$ geklammert sein. Eine solche Umformung würde allerdings das folgende Strukturgesetz

Minus 20 $C+(D-E) = (C+D)-E$

voraussetzen, welches wiederum offenkundig ungültig ist. Zwar gilt für *Zahlen* c, d und e tatsächlich $c+(d-e) = (c+d)-e$; für "reale" Dinge, die das Idempotenzgesetz PLUS 2 erfüllen, würde Minus 20 jedoch erneut zu dem Widerspruch (bzw. der vollkommenen Trivialisierung) führen, daß jeder Term mit 0 zusammenfällt. Denn für $C = D = E$ könnte man beweisen, daß $C+(C-C)$, d.h. $C+0$ bzw C , mit $(C+C)-C$, also mit $C-C$ und deshalb mit 0 identisch ist!

Gegen diese Analyse der Leibnizschen Denkfehler, die vor allem in seiner groben Nachlässigkeit beim Zusammenfassen bzw. Klammern komplexer Terme verankert zu sein scheinen, ließe sich einwenden, daß die Umformung des Terms " $L-A-L+A$ " in die Gestalt " $A+L-A-L$ " nicht auf dem ungültigen Minus 20, sondern auf einem gänzlich anderen Prinzip beruhe. Man könnte nämlich argumentieren, daß Leibniz die Gleichung ' $L-$

$A-L+A = H$ durch "Negation" beider Seiten in $'A+L-A-L = -H'$ transformiert habe. Als ich die fragliche Passage innerhalb der textkritischen Akademieausgabe zum ersten Mal genau überprüfte, mußte ich zu meiner größten Überraschung feststellen, daß dort – im Gegensatz zur früheren Edition durch Couturat – tatsächlich steht: "seu $A+L-A-L \infty -H$ "! Daraufhin kontrollierte ich natürlich sofort das Original (bzw. meine Photokopie vom Mikrofilm der Leibniz-Handschrift) und entdeckte in der Tat einen Strich '–', den Leibniz nachträglich zwischen dem Gleichheitszeichen ' ∞ ' und dem Buchstaben 'H' eingefügt hatte. Dieser Strich steht jedoch nicht in der gleichen Zeile wie ' ∞H ', sondern etwas oberhalb und er ist in seiner Funktion bzw. Bedeutung alles andere als eindeutig zu interpretieren.

Erstens könnte er als Unterstreichung des Wortes 'via' dienen, das eine Zeile höher steht. Diese Alternative erscheint mir jedoch ziemlich unwahrscheinlich. Zweitens könnte es sich um einen Gedankenstrich handeln, mit dem Leibniz den folgenden Halbsatz "nam hic non licet compensare" von der vorherigen Gleichung " $A+L-A-L \infty H$ " abtrennt. Oder er symbolisiert drittens, wie die Akademieausgabe es vorschlägt, die "Negation" von H, d.h. den "privativen" Term ' $-H$ ' als elliptische Form von ' $0-H$ '. Diese Interpretation erscheint mir jedoch sowohl vom reinen Textbefund her als auch aufgrund inhaltlicher Erwägungen wenig wahrscheinlich. Erstens verwendet Leibniz in dem Fragment # 181 für die Minus-Operation durchgängig das eingekreiste –; der fragliche Strich hingegen ist nicht eingekreist. Zweitens würde die Darstellung des "privativen" Terms ' $-H$ ' im Sinne von ' $0-H$ ' dem von Leibniz befolgten, "konservativen" Vorgehen widersprechen, demzufolge eine Subtraktion $A-B$ voraussetzt, daß B in A enthalten ist. Drittens würde der hypothetische Übergang von ' $L-A-L+A = H$ ' zu ' $A+L-A-L = -H$ ' per beidseitiger "Negation" so ohne weiteres, d.h. ohne Annahme weiterer Strukturgesetze, auch gar nicht funktionieren bzw. jedenfalls nicht zu der Formel $((A+L)-A)-L$ führen, die nötig wäre, um die abschließende These "Aliud est hic summam duorum, aliud singula seorsim detrahere" zu begründen. Auf weitere Details wollen wir hier aus Platzgründen verzichten und lediglich festhalten: So genial Leibnizens vorherige Analyse des Kommune von A und B auch ist, die ihn zur Entdeckung der wichtigen Gesetze KOMMUNE 5 und KOMMUNE 6 führten, so verworren bleiben die flüchtigen Überlegungen zu der peripheren Frage, welcher dieser beiden "Wege" der kürzere sei. Die "arithmetische" Umformung der ohne die eigentlich erforderlichen Klammern geschriebenen Terme ist teilweise fehlerhaft und kann jedenfalls die abschließend behauptete Ungültigkeit des Prinzips MINUS 13 nicht begründen. Einige der (implizit vorgenommenen) Umformungen setzen umgekehrt die Gültigkeit eben dieses Prinzips voraus. Die kleinen Leibnizschen Lapsi vermindern aber nicht den großen Wert, den das Fragment # 181 als eines von vielen Puzzlestücken des hier rekonstruierten Plus-Minus-Kalküls besitzt.

6 Schlußbemerkung

Die im letzten Abschnitt diskutierte Problempassage " $A+L-A-L \infty [-]H$ " ändert überhaupt nichts daran, daß die Edition der philosophischen Schriften durch die Münsteraner Leibnizforschungsstelle spätestens mit dem Band A VI, 4 ein Niveau erreicht hat, das schlechthin kaum noch zu überbieten ist und das die im Titel dieses Aufsatzes angedeutete Bewertung nahelegt. Unter dem Pseudonym Guilielmus Pacidius verfaßte Leibniz zur Zeit der "Generales Inquisitiones" u.a. den Entwurf einer "Scientia Generalis", die seit der Veröffentlichung durch Erdmann den Kurztitel trägt "Guilielmi Pacidii Plus Ultra". Mit 'Guilielmi Pacidii Non Plus Ultra' sollte aber nicht nur zum Ausdruck gebracht werden, daß die Akademieausgabe das Non-plus-ultra der Edition der philosophischen Schriften von Leibniz darstellt. Sondern es sollte auch der Anspruch erhoben

werden, daß der Plus-Minus-Kalkül in der hier entwickelten Rekonstruktion ein Non-Plus-Ultra der Logik (vielleicht sogar allgemeiner: der Philosophie) jenes Guilielmus Pacidius darstellt. Diese Rekonstruktion war nur mit Hilfe der vorzüglichen Akademieausgabe möglich, die ein unverzichtbares Werkzeug für jeden ernsthaften Leibniz-Forscher darstellt. Der zunächst horrende Preis von 1.400 DM für den "einen" Band A VI, 4 ist nicht nur unter dem quantitativem Aspekt von mehr als 3.000 Seiten, sondern erst recht aus qualitativer Perspektive absolut gerechtfertigt. Der einzige Wermutstropfen: ein Abschluß der Edition der Philosophischen Schriften, d.h. insbesondere des Bandes A VI, 5, ist noch *lange* nicht abzusehen.

7 Literatur

Leibniz-Editionen bzw. Übersetzungen

J. E. Erdmann (ed.), *God. Guil. Leibnitii Opera Philosophica quae exstant ...*, Berlin 1840.

GM = C. J. Gerhardt (hrsg.), *Mathematische Schriften*, Berlin 1849-1863.

GP = C. J. Gerhardt (hrsg.), *Die philosophischen Schriften*, Berlin 1890.

C = L. Couturat (ed.), *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*, Paris 1903.

F. Schmidt (hrsg.), *Fragmente zur Logik*, Berlin 1960.

G. H. R. Parkinson (ed.), *Leibniz - Logical Papers*, Oxford 1966.

H. Herring (hrsg.), *Schriften zur Logik und zur Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft*, Darmstadt 1992.

Unveröffentlichte Manuskripte werden zitiert gemäß dem Katalog:

E. Bodemann, *Die Leibniz-Handschriften der Königlichen Öffentlichen Bibliothek zu Hannover*, Hannover 1895.

Sekundärliteratur

Couturat, Louis [1901]: *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris.

Dürr, Karl [1930]: *Neue Beleuchtung einer Theorie von Leibniz - Grundzüge des Logikkalküls*, Darmstadt.

Heinekamp, Albert, Wolfgang Lenzen & Martin Schneider (Hrg.) [1990]: *Mathesis Rationis - Festschrift für Heinrich Schepers*, Münster.

Lenzen, Wolfgang [1983]: "Zur extensionalen und 'intensionalen' Interpretation der Leibnizschen Logik". In: *Studia Leibnitiana* 15, 129-148.

Lenzen, Wolfgang [1984a]: "'Unbestimmte Begriffe' bei Leibniz". In: *Studia Leibnitiana* 16, 1-26.

Lenzen, Wolfgang [1984b]: "Leibniz und die Boolesche Algebra". In: *Studia Leibnitiana* 16, 187-203.

- Lenzen, Wolfgang [1986]: "'Non est' non est 'est non' — Zu Leibnizens Theorie der Negation". In: *Studia Leibnitiana* 18, 1-37.
- Lenzen, Wolfgang [1987]: "Leibniz's Calculus of Strict Implication". In J. Sziednicki (ed.) *Initiatives in Logic (Reason and Argument 1)*, Dordrecht, 1-35.
- Lenzen, Wolfgang [1989]: "Arithmetical vs. 'Real' Addition - A Case Study of the Relation between Logic, Mathematics, and Metaphysics in Leibniz". In: N. Rescher (ed.), *Leibnizian Inquiries - A Group of Essays*, Lanham, 149-157.
- Lenzen, Wolfgang [1990]: *Das System der Leibnizschen Logik*, Berlin.
- Lewis, Clarence Irvine [1918]: *A Survey of Symbolic Logic*, hier zitiert nach der "Dover edition" New York 1960.
- Schröter, Karl [1974]: "Die Beiträge von Leibniz zur Algebra der verbandstheoretischen Relationen und Operationen". In: *Akten des II. Internationalen Leibnizkongresses* (Studia Leibnitiana Supplementa XIII), Teil 2, 27-36.